NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXYZ

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A - LÝ THUYẾT CHUNG

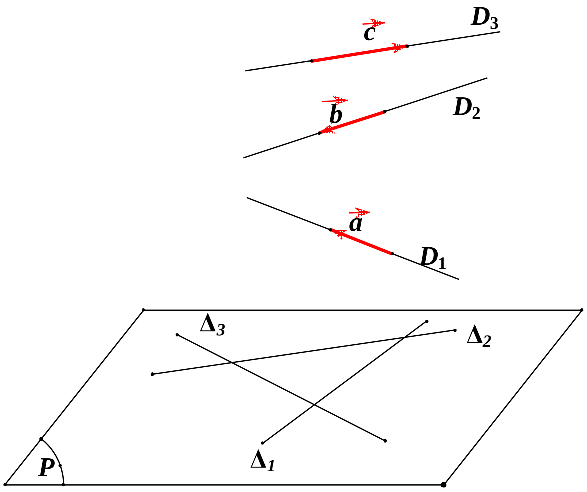
1. Véc tơ trong không gian

*** Định nghĩa**

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu

□ **Chú ý:** Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

2. Vecto đồng phẳng



*** Định nghĩa:** Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

□ **Chú ý:**

□ n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

□ Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.

*** Điều kiện để 3 vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng**

Định lý 1:

$$\boxed{\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}: \vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}}$$

*** Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng**

□ Định lý 2: Cho 3 vecto $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kì một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa la có một bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) duy nhất

$\vec{a}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$

□ **Chú ý**: Cho vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho: $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$

2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0 \Rightarrow m=n=p=0$

3. Tọa độ của vecto

Trong không gian xét hệ trục $\mathrm{Ox}yz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng $(\mathrm{Ox}y)$ tại O. Các vecto đơn vị trên từng trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0),\vec{k}=(0;0;1)$.

a) $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

b) $M(x_M,y_M,z_M)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$

c) Cho $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ ta có:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

d) M là trung điểm AB thì $M\left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}; \dfrac{z_B + z_A}{2}\right)$

e) Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}; \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\cos\varphi = \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$)
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc: $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

4. Tích có hướng và ứng dụng

Tích có hướng của $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

a. Tính chất:

- $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

b. Các ứng dụng tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích tứ diện $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

□ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] . \overrightarrow{AA'} \right|$

5. Một số kiến thức khác

Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k\left(\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}$ với $k \neq 1$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho 4 điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. $SABC$ là:

A. Tứ diện. **B.** Hình chóp đều.
C. Tứ diện đều. **D.** Hình thang vuông

Hướng dẫn giải:

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;0); \overrightarrow{BC} = (0;-1;1); \overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$

$\Rightarrow AB = BC = CA = \sqrt{2} \Rightarrow ABC$ là tam giác đều

$\overrightarrow{SA} = (1;0;0); \overrightarrow{SB} = (0;1;0); \overrightarrow{SC} = (0;0;1) \Rightarrow SA = SB = SC = 1$

$$D(SA, SB, SC) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Hay ta có thể tính $\left[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB} \right] \overrightarrow{SC} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ không đồng phẳng.

$\Rightarrow SABC$ là hình chóp đều, đỉnh S.

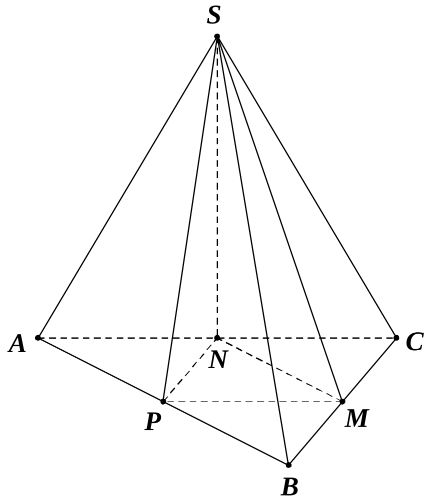
Chọn B.

Câu 2: Cho bốn điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB. Khi đó SMNP là:

A. Hình chóp. **B.** Hình chóp đều. **C.** Tứ diện đều. **D.** Tam diện vuông

Hướng dẫn giải:

Tam giác: ABC có $AB = BC = CA = \sqrt{2} \Rightarrow MN = NP = PM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\overrightarrow{SA}=(1;0;0);\overrightarrow{SB}=(0;1;0);\overrightarrow{SC}=(0;0;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0 \Rightarrow SA\perp SB$

Tương tự $SA\perp SC, SB\perp SC$

Các tam giác vuông SAB, SBC, SCA vuông tại S, có các trung tuyến:

$SP=SM=SN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=MN=NP=PM$

Ta có: $SP\subset(SAB); SM\subset(SBC); SN\subset(SCA)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP},\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow SMNP$ là tứ diện đều.

Chọn C.

Câu 3: Cho bốn điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5,9,13)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{3},3,\dfrac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(1,\dfrac{7}{4},\dfrac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4},\dfrac{13}{4}\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}$

$$\Rightarrow G\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}(2+1+1+1)=\dfrac{5}{4} \\ y=\dfrac{1}{4}(2+3+2+2)=\dfrac{9}{4} \\ z=\dfrac{1}{4}(3+3+4+3)=\dfrac{13}{4} \end{cases}$$

Chọn D.

Câu 4: Cho 3 vectơ $\vec{a}=(1,1,-2);\vec{b}=(2,-1,2);\vec{c}=(-2,3,-2)$. Xác định vec tơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{d}=4;\vec{b}.\vec{d}=5;\vec{c}.\vec{d}=7$.

A. $(3,6,5)$. **B.** $(-3,6,-5)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2},6,\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(3,6,\dfrac{5}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{d}=4 \\ \vec{b}.\vec{d}=5 \\ \vec{c}.\vec{d}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=4 & (1) \\ 2x-y+2z=5 & (2) \\ -2x+3y-2z=7 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2): 3x=9 \Leftrightarrow x=3$ và $(2)+(3): 2y=12 \Leftrightarrow y=6$

$(1): z=\dfrac{1}{2}(x+y+4)=\dfrac{1}{2}(3+6-4)=\dfrac{5}{2} \Rightarrow \vec{d}=\left(3;6;\dfrac{5}{2}\right)$

Chọn D.

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1 có thể là:

A. $D(0;-3;-1)$ **B.** $D(0;2;-1)$ **C.** $D(0;1;-1)$ **D.** $D(0;3;-1)$

Hướng dẫn giải:

Do $D \in (Oyz) \longrightarrow D(0;b;c)$ với $c<0$

Theo giả thiết: $d\left[D,(Oxy)\right]=1 \Leftrightarrow |c|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1(loai) \\ c=-1 \end{array}\right. \longrightarrow D(0;b;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2), \overrightarrow{AC}=(-4;2;2), \overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2) \longrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=6b-6$

Cũng theo giả thiết, ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=-1 \end{array}\right.$

Chọn D.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB, CD và có góc C bằng $45°$.

A. $C(5;9;5)$. **B.** $C(1;5;3)$. **C.** $C(-3;1;1)$. **D.** $C(3;7;4)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1. $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$.

Đường thẳng CD có phương trình là $CD:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+2t \\ z=2+t \end{cases}$.

Suy ra $C(-1+2t;3+2t;2+t)$; $\overrightarrow{CB}=(4-2t;1-2t;-1-t)$, $\overrightarrow{CD}=(-2t;-2t;-t)$.

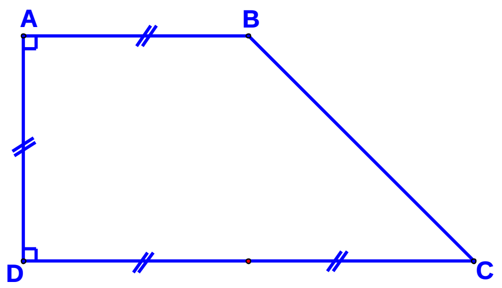
Ta có $\cos\widehat{BCD}=\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}$

Hay $\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Lần lượt thay t bằng $3;1;-1;2$ (tham số t tương ứng với toạ độ điểm C ở các phương án A, B, C, D), ta thấy $t=2$ thoả (1).

Cách 2.

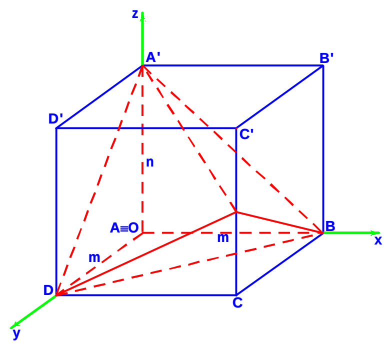
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1),\overrightarrow{AD}=(-2;1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $AB=AD$. Theo giả thiết, suy ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu $C(a;b;c)$, ta có $\overrightarrow{DC}=(a+1;b-3;c-2)$, $2\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Từ đó $C(3;7;4)$.



Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{245}{108}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{64}{27}$. **D.** $\frac{75}{32}$.

Hướng dẫn giải:



Tọa độ điểm $C(m;m;0),C'(m;m;;n),M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n),\overrightarrow{BD}=(-m;m;0),\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\frac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-mn;-mn;-m^2\right)$

$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{m^2n}{4}$

Ta có $m.m.(2n)\le\left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3=\frac{512}{27}\Rightarrow m^2n\le\frac{256}{27}$

$\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{64}{27}$

Chọn C.

Câu 8: Cho ba điểm $A(3;1;0),B(0;-1;0),C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$.　　**B.** $(2;-3;0)$.　　**C.** $(3;-2;0)$.　　**D.** $(3;-2;1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C'. Với mọi điểm T trong không gian có:

$$(1):\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TA'}\right)+\left(\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TB'}\right)+\left(\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TC'}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}\qquad(2)$$

Hệ thức (2) chứng tỏ. Nếu $T\equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=\vec{0}$ hay $T\equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ (1)

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\ (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C' nghĩa là

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}$ thì $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\Leftrightarrow G'\equiv G$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0),N(m,n,0),P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13},\widehat{MON}=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29.　　**B.** 27.　　**C.** 28.　　**D.** 30.

Hướng dẫn giải:

$\overrightarrow{OM}=(3;0;0),\overrightarrow{ON}=(m;n;0)\Rightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=3m$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 60^0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$MN=\sqrt{(m-3)^2+n^2}=\sqrt{13}$$

Suy ra $m=2;n=\pm 2\sqrt{3}$

$$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}=6\sqrt{3}p\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|6\sqrt{3}p\right|=3\Rightarrow p=\pm\sqrt{3}$$

Vậy $A=2+2.12+3=29$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6),B(-3;1;8),C(-1;0;7),D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1,S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ là hình thang và

$$S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm 1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\frac{17}{5} \\ b=\frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{A(1; 2; 0) hoặc } A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$$

(loại). Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M\left(x;y;z\right)$, để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right) \Rightarrow x+y+z=7$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG NÂNG CAO

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Trong không gian Oxyz phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

□ Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

□ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C), \vec{n}\neq\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

□ Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3); \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vecto pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

2. Các trường hợp riêng của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho mp (α):$Ax+By+Cz+D=0,$ với $A^2+B^2+C^2>0.$ Khi đó:

□ $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

□ $A=0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song trục Ox.

□ $A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mặt phẳng (Oxy).

□ $A,B,C,D\neq 0.$ Đặt $a=-\dfrac{D}{A}, b=-\dfrac{D}{B}, c=-\dfrac{D}{C}.$ Khi đó: $(\alpha): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{z}=1$

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0$

□ (α) cắt (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB'\neq A'B \\ BC'\neq B'C \\ CB'\neq C'B \end{cases}$

□ $(\alpha)_{//}(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \end{cases} \quad va\ AD' \neq A'D$

□ $(\alpha)_{\equiv}(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \\ AD'=A'D \end{cases}$

Đặt biệt: $(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(0^0 \le \varphi \le 90^0\right)$

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M,N và tạo với mặt phẳng $(Q): x-y-4=0$ một góc bằng 45^O. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z+2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 2x-y-2z+2=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x-2z+2=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Gọi vectơ pháp tuyến của mp(P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $\left(a^2+b^2+c^2 \neq 0\right)$, $\overrightarrow{n_Q}$

(P) qua $M(1;0;0) \Rightarrow (P): a(x-1)+by+cz=0$

(P) qua $N(0;0;-1) \Rightarrow a+c=0$

(P) hợp với (Q) góc 45^O $\Rightarrow \left|cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=cos45^O \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2b \end{array}\right.$

Với $a=0 \Rightarrow c=0$ chọn $b=1$ phương trình $(P): y=0$

Với $a=-2b$ chọn $b=-1 \Rightarrow a=2$ phương trình mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$.

Chọn A.

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P): x+4y-2z-6=0$, $(Q): x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn $M(6;0;0), N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của $(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 (a,b,c \neq 0)$$

$$(\alpha) \text{ chứa } M, N \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{a}=1 \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \end{cases}$$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Vây phương trình $x+y+z-6=0$.

Chọn B.

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-3}, \ \Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ và mặt cầu } (S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0$; $x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0$; $x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

D. $x-5y-3z-4=0$

Chọn B.

Hướng dẫn giải:

+ Δ_1 qua $M_1(2;-1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-3)$.

Δ_2 qua $M_2(0;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;2)$.

+ Mặt phẳng (α) song song với Δ_1, Δ_2 nên có vectơ pháp tuyến: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;-5;-3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x-5y-3z+D=0$

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$ và bán kính $R=4$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C), ta có: $2\pi r=\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{365}}{5}$

Khi đó: $d\left(I,(\alpha)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Rightarrow\dfrac{|D-3|}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-4\\D=10\end{array}\right.$

+ Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x-5y-3z-4=0$ (1) hay $x-5y-3z+10=0$ (2).

Vì $\Delta_1//(\alpha),\Delta_2//(\alpha)$ nên M_1 và M_2 không thuộc $(\alpha)\Rightarrow$ loại (1).

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là: $x-5y-3z+10=0$.

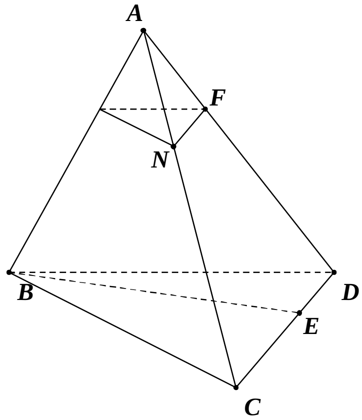
Chọn B.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1);B(1;1;2);C(1;-1;0);D(0;0;1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A,B và chia tứ diện thành hai khối $ABCE$ và $ABDE$ có tỉ số thể tích bằng 3.

A. $15x-4y-5z-1=0$. **B.** $15x+4y-5z-1=0$.

C. $15x+4y-5z+1=0$. **D.** $15x-4y+5z+1=0$

Hướng dẫn giải:



(P) cắt cạnh CD tại E, E chia đoạn CD theo tỷ số -3

$$\Rightarrow E\begin{cases}x=\dfrac{x_C+3x_D}{4}=\dfrac{1+3.0}{4}=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{y_C+3y_D}{4}=\dfrac{-1+3.0}{4}=\dfrac{-1}{4}\\ z=\dfrac{z_C+3z_D}{4}=\dfrac{0+3.1}{4}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}=(1;0;3);\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(1;-5;7)$

Vecto pháp tuyến của

$(P): \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right] = (15;-4;-5) \Rightarrow (P): (x-0)15 + (y-1)(-4) + (z+1)(-5) = 0$

$\Leftrightarrow 15x - 4y - 5z - 1 = 0$

Chọn A.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M, N và tạo với mặt phẳng $(Q): x-y-4=0$ một góc bằng 45^{O}. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z+2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 2x-y-2z+2=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} 2x-2z+2=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Gọi vecto pháp tuyến của mp(P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $\left(a^2+b^2+c^2 \neq 0\right)$, $\overrightarrow{n_Q}$

(P) qua $M(1;0;0) \Rightarrow (P): a(x-1) + by + cz = 0$

(P) qua $N(0;0;-1)$ $\Rightarrow a + c = 0$

(P) hợp với (Q) góc 45^{O} $\Rightarrow \left|cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = cos45^{O} \Leftrightarrow \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2b \end{array}\right.$

Với $a=0 \Rightarrow c=0$ chọn $b=1$ phương trình $(P): y=0$

Với $a=-2b$ chọn $b=-1 \Rightarrow a=2$ phương trình mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$.

Chọn A.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1); B(1;1;2); C(1;-1;0); D(0;0;1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\dfrac{1}{27}$.

A. $3x-3z-4=0$.

B. $y-z-1=0$.

C. $y+z-4=0$.

D. $4x+3z+4=0$

Hướng dẫn giải:

Tỷ số thể tích hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$: $\left(\dfrac{AM}{AB}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow M$ chia cạnh AB theo tỉ số -2

$$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{1+2.0}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1+2.1}{3}=1 \\ x=\dfrac{2+2(-1)}{3}=0 \end{cases};\overrightarrow{BC}=-2(0;1;1);\overrightarrow{BD}=-(1;1;1)$$

Vecto pháp tuyến của $(Q):\vec{n}=(0;1;-1)$

$\Rightarrow M\in(Q)\Rightarrow(Q):\left(x-\frac{1}{3}\right)0+(y-1)1+(z-0)(-1)=0$

$\Rightarrow(P):y-z-1=0$

Chọn B.

Câu 7: Từ gốc O vẽ OH vuông góc với mặt phẳng $(P),(OH=p)$; gọi α,β,γ lần lượt là các góc tạo bởi vec tơ pháp tuyến của (P) với ba trục Ox,Oy,Oz. Phương trình của (P) là:

A. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$.
B. $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma-p=0$.
C. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0$.
D. $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+p=0$

Hướng dẫn giải:

$H(p\cos\alpha,p\cos\beta,c\cos\gamma)\Rightarrow\overrightarrow{OH}=(p\cos\alpha,p\cos\beta,c\cos\gamma)$

Gọi: $M(x,y,z)\in(P)\Rightarrow\overrightarrow{HM}=(x-p\cos\alpha,y-p\cos\beta,z-c\cos\gamma)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{HM}$

$\Leftrightarrow(x-p\cos\alpha)p\cos\alpha+(y-p\cos\beta)p\cos\beta+(z-c\cos\gamma)p\cos\gamma$

$\Leftrightarrow(P):x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$

Chọn A.

Câu 8: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cắt hai trục $y'Oy$ và $z'Oz$ tại $A(0,-1,0),B(0,0,1)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 45^0.

A. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$.
B. $\sqrt{2}x+y-z+1=0$.
C. $\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z+1=0$.
D. $\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z-1=0$

Hướng dẫn giải:

Gọi $C(a,0,0)$ là giao điểm của (P) và trục $x'Ox$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(0,-1,-1);\overrightarrow{BC}=(a,0,-1)$

Vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(1,-a,a)$

Vec tơ pháp tuyến của (yOz) là: $\vec{e_1}=(1,0,0)$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và $(yOz)\Rightarrow\cos45^0=\dfrac{1}{\sqrt{1+2a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow4a^2=2\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy có hai mặt phẳng $(P):\pm\sqrt{2}x-y+z=1\Rightarrow\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z-1=0$

Chọn D.

Câu 9: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z-3=0\\2x-y+2z+21=0\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}2x-y+z+3=0\\2x-y+z-1=0\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}2x-y+z+13=0\\2x-y+z-1=0\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Vậy: (P): $2x-y+2z+3=0$ hoặc (P): $2x-y+2z-21=0$

(S) có tâm I(1; –3; 2) và bán kính R = 4. VTPT của (α) là $\vec{n}=(1;4;1)$.

$\Rightarrow$ VTPT của (P) là: $\vec{n}_P=[\vec{n},\vec{v}]=(2;-1;2)$ $\Rightarrow$ PT của (P) có dạng: $2x-y+2z+m=0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-21\\m=3\end{array}\right.$.

Vậy: (P): $2x-y+2z+3=0$ hoặc (P): $2x-y+2z-21=0$.

Chọn B.

Câu 10: Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=2$. **B.** $m.n=-2$. **C.** $m.n=4$. **D.** $m.n=-4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Mặt phẳng (P) qua A có dạng $a(x-0)+b(y-8)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-8b-2c=0$.

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I;(P))=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-3b+7c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}.\ (*)$$

Mà $d(B;(P))=\dfrac{|9a-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|9a-15b+21c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{|5a-11b+5c+4(a-b+4c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le$$

$$\le\frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+4\frac{|a-b+4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=18\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{4}$. Chọn $a=1; b=-1; c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x-y+4z=0$. Suy ra $m=-1; n=4$. Suy ra: $m.n=-4$.

Câu 11: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4), B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Viết phương trình tổng quát mặt phẳng (P).

A. $y+\sqrt{3}z+4\sqrt{3}=0$. **B.** $y+\sqrt{3}z-4\sqrt{3}=0$.

C. $y\pm\sqrt{3}z\pm4\sqrt{3}=0$. **D.** $x-y-\sqrt{3}z-4\sqrt{3}=0$

Hướng dẫn giải:

$C(0,c,0); \overrightarrow{AC}=(-3,c,-4); \overrightarrow{AB}=(-6,0,0)$

Vec tơ pháp tuyến của $(P): \vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=6(0,4,c)$

Vec tơ pháp tuyến của $(xOz): \overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$

$\cos 30^0=\frac{|c|}{\sqrt{16+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2=48 \Leftrightarrow c=\pm4\sqrt{3} \Rightarrow \vec{n}=6\left(0,4,\pm4\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow (P):(x-3).0+(y-0)4+(z-4)\left(\pm4\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow y\pm z\sqrt{3}\pm4\sqrt{3}=0$

Chọn C.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t_1\\y=0\\z=0\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=1\\y=t_2\\z=0\end{cases}$, $d_3:\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t_3\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $2x+2y+z-11=0$. **B.** $x+y+z-6=0$.

C. $2x+2y-z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(1;b;0)$, $C(1;0;c)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-a;b;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{CH}=(2;2;1-c)$, $\overrightarrow{AH}=(3-a;2;1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{CH}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2bc+2c(a-1)+(1-c)b(a-1)=0\\ a=b+1\\ c=2b\end{cases} \Rightarrow 9b^2-2b^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\frac{9}{2}\end{array}\right.$$

Nếu $b=0$ suy ra $A\equiv B$ (loại).

Nếu $b=\dfrac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\dfrac{11}{2};0;0\right)$, $B\left(1;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C(1;0;9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+2y+z-11=0$.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=t' \\ y=5+t' \\ z=\sqrt{2}t'-3\sqrt{2}-5 \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và tạo với mặt phẳng Oyz một góc nhỏ nhất.

A. $3x+y+\sqrt{2}z+7=0$. **B.** $3x-y-\sqrt{2}z-7=0$.

C. $-3x+y-\sqrt{2}z+7=0$. **D.** $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử (β): $Ax+By+Cz+D=0$ (đk: $A^2+B^2+C^2>0$), (β) có vtpt là $\vec{n}=(A;B;C)$

$$d\subset(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases} A\in(\beta) \\ \vec{n}.\vec{a}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3A-2B+D=0 \\ A-B+C\sqrt{2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} D=-A+2C\sqrt{2} \\ B=A+C\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\cos(\widehat{(\beta),(Oyz)})=\left|\cos(\vec{n},\vec{i})\right|=\frac{|A|}{\sqrt{A^2+(A+C\sqrt{2})^2+C^2}}$$

TH 1: A = 0 (không thoả đb hoặc $\widehat{(\beta),(Oyz)}$ không nhỏ nhất)

TH 2: A $\neq$ 0, ta có:

$$\cos(\widehat{(\beta),(Oyz)})=\frac{1}{\sqrt{1+(1+\frac{C}{A}\sqrt{2})^2+(\frac{C}{A})^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{C}{A}\sqrt{3})^2+2.\frac{C}{A}\sqrt{2}+(\frac{\sqrt{6}}{3})^2+\frac{12}{9}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{C}{A}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3})^2+\frac{12}{9}}}$$

$\widehat{(\beta),(Oyz)}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{(\beta),(Oyz)})$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $(\frac{C}{A}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3})^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$

$\frac{C}{A}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases} A=1 \text{ (choïn)} \\ C=-\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ nên $\begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ D=-\frac{7}{3} \end{cases}$. Vậy: (β): $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$

Chọn D.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

A. $(P): x+2y+5z-4=0$.
B. $(P): x+2y+5z-5=0$.
C. $(P): x+2y-z-4=0$.
D. $(P): 2x-y-3=0$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1 (Tự luận**)**

Đường thẳng d qua M(2;1;0) và có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$

Ta có: AB ⊥ d và AB ⊥ Oz nên AB có VTCP là: $\overrightarrow{u_{AB}}=\left[\overrightarrow{u_d},\vec{k}\right]=(2;-1;0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua M(2;1; 0), có VTPT là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{AB}}\right]=(1;2;5)$

$\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0 \Rightarrow$ ***Chọn A***

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm M(2;1;0) và N(3;3;-1)

Giả sử mp(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

AB ⊥ d $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow a=2b$ (1)

(P) chứa d nên d cũng đi qua M, N $\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ (2), $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{-1}{c}=1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ a = 4, b = 2, c = $\frac{4}{5}$ $\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0 \Rightarrow$ ***Chọn A***

Câu 15: **Trong không** gian tọa độ *Oxyz* cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=2+t\end{cases}$ và mp $(P):\ 2x-y-2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) qua *d* và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

A. $x-y-z+3=0$
B. $x+y-z+3=0$

C. $x+y+z+3=0$ **D.** $x-y+z+3=0$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2} \\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$.

Do vậy mặt phẳng (R) qua d thì (R) thuộc chùm mặt phẳng:

$2x+y+1+m(x+z-2)=0$.

Hay mp (R): $(2+m)x+y+mz+1-2m=0$ (*). Mp (R) có

$\vec{n}_1=(m+2;1;m);\vec{n}_P=(2;-1;-2)$.

Vậy:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_P}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|n_P\right|}=\frac{2(m+2)+1-2m}{\sqrt{(m+2)^2+1+m^2}\sqrt{4+1+4}}=\frac{5}{3\sqrt{2m^2+4m+5}}=\frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2+3}}\le\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Do α nhỏ nhất cho nên $\cos\alpha$ lớn nhất khi $m=-1$.

Vậy thay vào (*) ta có mp $(R): x+y-z+3=0$.

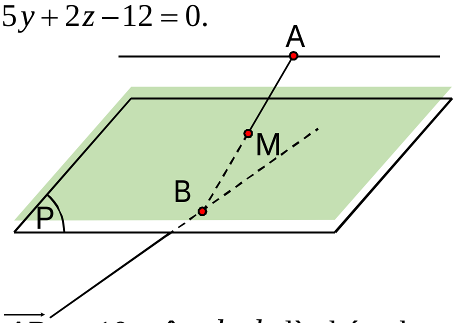
Chọn B.

Câu 16: Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=2-2t' \\ y=3 \\ z=t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $x+5y+2z+12=0.$ **B.** $x+5y-2z+12=0.$

C. $x-5y+2z-12=0.$ **D.** $x+5y+2z-12=0.$

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

d_1 qua $A(2;1;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$;

d_2 qua $B(2;3;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_2=(-2;0;1)$.

Có $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-5;-2)$; $\overrightarrow{AB}=(0;2;0)$, suy ra $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{AB}=-10$, nên $d_1;d_2$ là chéo nhau.

Vậy mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1,d_2 là đường thẳng song song với d_1,d_2 và đi qua trung điểm $I(2;2;0)$ của đoạn thẳng AB.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần lập là: $x+5y+2z-12=0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x-2y-4z=0$.
B. $7x-2y-4z+3=0$.
C. $2x+y+3z+3=0$.
D. $14x-4y-8z+3=0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}} = (2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}} = (2;-1;4)$

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;-2); \left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}\right] = (7;-2;-4)$;

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}\right]\overrightarrow{AB} = -1 \neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

Do (α) cách đều d_1, d_2 nên (α) song song với $d_1, d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}\right] = (7;-2;-4)$

$\Rightarrow (\alpha)$ có dạng $7x-2y-4z+d=0$

Theo giả thiết thì $d\left(A,(\alpha)\right) = d\left(B,(\alpha)\right) \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{69}} = \frac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow (\alpha): 14x-4y-8z+3=0$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P): 2x-2z+1=0$.
B. $(P): 2y-2z+1=0$.
C. $(P): 2x-2y+1=0$.
D. $(P): 2y-2z-1=0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1;1;1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2;-1;-1)$.Vì (P) song songvới hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và **C.**

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB. Do đó $(P): 2y-2z+1=0$

Chọn B.

Câu 19: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 5x-z-4=0$ và hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2};\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình của mặt phẳng $(Q)//(P)$, theo thứ tự cắt d_1,d_2 tại A,B sao cho $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

A. $(Q_1): 5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0;(Q_2): 5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$.

B. $(Q_1): 5x-z-2=0;(Q_2): 55x+11z+14=0$.

C. $(Q_1): -5x-z-2=0;(Q_2): -55x-11z+14=0$.

D. $(Q_1): 5x-z-4=0;(Q_2): 55x-11z+7=0$

Hướng dẫn giải:

$$d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=1+2t'\\y=2+t'\\z=-1+t'\end{cases};(Q): 5x-z+d=0, d\neq -4$$

$$(Q)\cap d_1=A\left(\frac{-3-d}{3};\frac{6+d}{3};\frac{-15-2d}{3}\right),(Q)\cap d_2=B\left(\frac{-3-2d}{9};\frac{12-d}{9};\frac{30+5d}{9}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{6+d}{9};\frac{-6-4d}{9};\frac{30+5d}{9}\right)=\frac{1}{9}(6+d;-6-4d;30+5d)$

Do $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{1}{8}\left((6+d)^2+(-6-4d)^2+(30+5d)^2\right)$

$$=\frac{80}{9}\Leftrightarrow 42d^2+300d+252=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=\frac{-25+\sqrt{331}}{7}\\d=\frac{-25-\sqrt{331}}{7}\end{array}\right.$$

Vậy, tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn:

$(Q_1): 5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0;(Q_2): 5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$

Chọn A.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng d: $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và có khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khi đó (P) có một véctơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(4;5;13)$ **B.** $\vec{n}=(4;5;-13)$ **C.** $\vec{n}=(4;-5;13)$ **D.** $\vec{n}=(-4;5;13)$

Hướng dẫn giải:

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên d và (P)

Khi đó: d(A,(P)) = AK $\le$ AH hay d(A,(P)) lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$

Ta có: $H(-3+2t;-1+t;-t);\vec{a}=(2;1;-1)$ và $\overrightarrow{AH}.\vec{a}=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$

Suy ra: $\overrightarrow{AH}=(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{13}{3})$

Hay một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(4;5;13)$

Chọn A.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: d_1 đi qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1)+B(y+2)+Cz=0,(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Ta có: $d\subset(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow C=A+2B$

Gọi $\alpha=((P),d_2)\Rightarrow \sin\alpha=\frac{|4A+3B|}{3\sqrt{2A^2+4AB+5B^2}}=\frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B^2}}$

Với $B=0$ $\Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Với $B\neq 0$. Đặt $t=\frac{A}{B}$, ta được $\sin\alpha=\frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Ta có: $f'(t)=\frac{16t^2+124t+84}{(2t^2+4t+5)^2}$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3}{4} \\ t=-7 \end{array}\right.$$

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t)=\frac{25}{3}$ khi $t=-7 \Leftrightarrow \frac{A}{B}=-7$

Khi đó: $\sin\alpha = f(-7)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

Vậy $\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\frac{A}{B}=-7 \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P): 7x-y+5z-9=0$

Chọn B.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x+2y-z=0$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$. **C.** $x-y-z=0$. **D.** $x+y+z-2=0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) $\Rightarrow \Delta MHO$ vuông tại H $\Rightarrow MH \le MO$

$\Rightarrow MH_{\max}=MO$. Khi đó (P) đi qua M và vuông góc với MO $\Rightarrow \overrightarrow{MO}(1;2;-1)$ là vecto pháp tuyến của (P) $\Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-0)+2(y-0)-1(z-0)=0$ hay $x+2y-z=0$.

Chọn A.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

B. (P) qua điểm $A(0;2;0)$.

C. (P) song song với mặt phẳng $(Q): 7x-y+5z-3=0$.

D. (P) cắt d_2 tại điểm $B(2;-1;4)$.

Hướng dẫn giải:

d_1 qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$. Vì $d_1 \subset (P)$ nên $M \in (P)$.

Pt mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1)+B(y+2)+Cz=0\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

Ta có: $d_1\subset(P)\Rightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Rightarrow C=A+2B$.

Gọi $\alpha=\left(\widehat{(P),d_2}\right)\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{|4A+3B|}{3\sqrt{2A^2+4AB+5B^2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B^2}}$.

TH1: Với $B=0$ thì $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

TH2: Với $B\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{A}{B}$, ta được: $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(x)=\dfrac{25}{7}$ khi $t=-7$ khi $\dfrac{A}{B}=-7$.

Khi đó $\sin\alpha=f(-7)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow\alpha$ lớn nhất với $\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\dfrac{A}{B}=-7$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):7x-y+5z-9=0$.

Chọn B.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1),B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0),D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa: $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $4=\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$\Rightarrow\dfrac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\geq\dfrac{27}{64}\Rightarrow\dfrac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\dfrac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\geq\dfrac{27}{64}\Rightarrow V_{AB'C'D'}\geq\dfrac{27}{64}V_{ABCD}$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow (B'C'D'):16x+40y-44z+39=0$.

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục *Ox*, *Oy*, *Oz* lần lượt tại A,B,C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x+2y+3z-14=0$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}-1=0$.

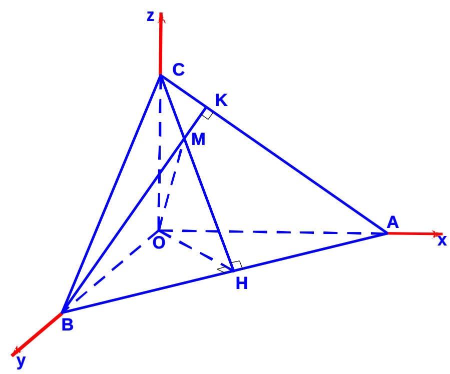
C. $3x+2y+z-10=0$. **D.** $x+2y+3z+14=0$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, K là hình chiếu vuông góc B trên AC. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M=BK\cap CH$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}AB\perp CH\\AB\perp CO\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp(COH)\Rightarrow AB\perp OM$ (1)

(1)



Chứng minh tương tự, ta có: $AC\perp OM$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $OM\perp(ABC)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có một *VTPT* là $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$ nên có phương trình là: $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Cách 2:

+) Do A,B,C lần lượt thuộc các trục Ox,Oy,Oz nên $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ ($a,b,c\neq 0$).

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

+) Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \\ M\in(ABC) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a,b,c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x+2y+3z-14=0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất là

A. $(P):y-z+4=0$ **B.** $(P):x-z+4=0$

C. $(P):x+y-z+4=0$ **D.** $(P):y-z-4=0$

Hướng dẫn giải:

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$. Gọi $a=\widehat{((P),(Q))}$.

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3),N(1;0;4)\in d$. Ta có: $\begin{cases} M\in(P) \\ N\in(P) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=-a-b \\ d=7a+4b \end{cases}$

$\Rightarrow$ (P): $ax+by+(-2a-b)z+7a+4b=0$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}$

TH1: Nếu a = 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow a=30^0$.

TH2: Nếu a ≠ 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{\left|1+\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{5+4\dfrac{b}{a}+2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$. Đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và $f(x)=\cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9}{6}.\dfrac{x^2+2x+1}{5+4x+2x^2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x)=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow a=90^0>30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức a = 0. Khi đó chọn $b=1,c=1,d=4$.

Vậy: (P): $y-z+4=0$.

Chọn A.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

A. $x-4y-5z+17=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $x-4y+5z-13=0$. **D.** $3x+2y+z-11=0$.

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=5$. Do $IA=\sqrt{17}<\text{R}$ nên AB luôn cắt (S).

Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-\left(d\left(I,(\alpha)\right)\right)^2}$. Đề bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp(ABC).

Ta có $\overrightarrow{\text{AB}}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{\text{AC}}=(-2;-3;-2)$ suy ra (ABC) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$

(α) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-9-6;-3)=-3(3;2;1)$

Phương trình $(\alpha):3(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y+z-11=0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0$, $(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của$(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn $M(6;0;0),N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của$(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox,Oy,Oz

$$\Rightarrow (\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\left(a,b,c\neq 0\right)$$

$$(\alpha)\text{ chứa } M,N\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{a}=1\\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1\end{cases}$$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Vây phương trình $x + y + z - 6 = 0$.

Câu 29: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x + y + z - 3 = 0$. **B.** $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): x - y - z + 1 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \left(a, b, c \neq 0\right)$$

Ta có: $\begin{cases} N \in (P) \\ NA = NB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |a-1| = |b-1| \\ |a-1| = |c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 3 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0$

Câu 30: Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x + 3y + 2z + 18 = 0$. **B.** $6x + 3y + 3z - 21 = 0$.

C. $6x + 3y + 3z + 21 = 0$. **D.** $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0), C(0;0;c) \quad (a,b,c > 0)$

(ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (1)

M(1;2;3) thuộc (ABC): $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Thể tích tứ diện OABC: $V = \frac{1}{6}abc$

Áp dụng BDT Côsi ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27 \Rightarrow V \geq 27$

Ta có: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

Vậy (ABC): $6x+3y+2z-18=0$. **Chọn (D)**

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $\mathrm{E}(8;1;1)$.Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+y+2z-11=0$. **B.** $8x+y+z-66=0$.

C. $2x+y+z-18=0$. **D.** $x+2y+2z-12=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1 :

Với đáp án A: $A(11;0;0);\mathrm{B}(0;11;0);\mathrm{C}(0;0;\frac{11}{2})\Rightarrow G(\frac{11}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{6})\Rightarrow \mathrm{OG}^2=\frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0);\mathrm{B}(0;66;0);\mathrm{C}(0;0;66)\Rightarrow G(\frac{11}{4};22;22)\Rightarrow \mathrm{OG}^2=\frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0);\mathrm{B}(0;18;0);\mathrm{C}(0;0;18)\Rightarrow G(3;\frac{18}{3};\frac{18}{3})\Rightarrow \mathrm{OG}^2=81$

Với đáp án D: $A(-12;0;0);\mathrm{B}(0;6;0);\mathrm{C}(0;0;6)\Rightarrow G(-4;2;2)\Rightarrow \mathrm{OG}^2=24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Theo đề bài ta có :$\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

Ta có $(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)\ge(a.2+b.1+c.1)^2\Rightarrow 6.(a^2+b^2+c^2)\ge(2a+b+c)^2$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)}&\ge(a.2+b.1+c.1)\\&\ge(2a+b+c)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&\ge(4+1+1)^2=36\end{aligned}$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4}=b^2=c^2\Rightarrow a=2b=2c.$

Vậy $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a=12,b=c=6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là : $\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1$ hay $x+2y+2z-12=0$.

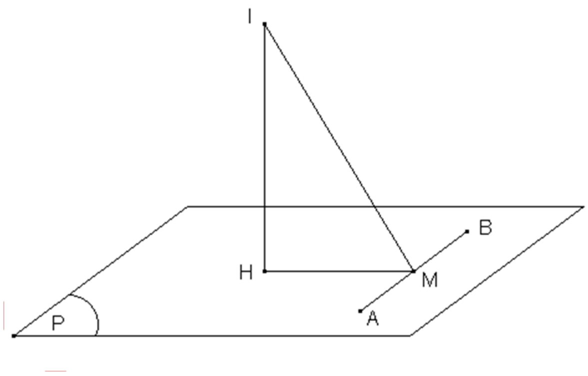
Câu 32: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(2;1;6), B(1;2;4)$ và $I(1;3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ I đến (P) lớn nhất.

A. $3x+7y+6z-35=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$.

C. $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $IA=\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\sqrt{29}$ và $IB=\sqrt{0^2+5^2+2^2}=\sqrt{29}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, vì IA=IB nên IM$\perp$AB, ta có $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};5\right)$; $IM=\dfrac{\sqrt{94}}{2}$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P):

Nếu H, M là hai điểm phân biệt thì tam giác IHM vuông tại H, IH<IM hay $IH<\dfrac{\sqrt{94}}{2}$.

Nếu H trùng với M thì $IH=IM=\dfrac{\sqrt{94}}{2}$. Vậy ta có $IH\le\dfrac{\sqrt{94}}{2}$, IH lớn nhất khi H$\equiv$M.

Khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2};3\right)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{3}{2}(x-2)+\dfrac{7}{2}(y+1)+3(z-6)=0$ hay $3x+7y+6z-35=0$

Chọn A.

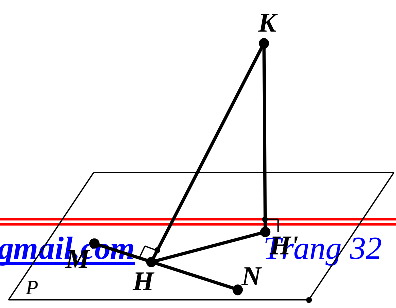
Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Mặt phẳng *(P)* đi qua *M, N* sao cho khoảng cách từ $K(0;0;2)$ đến (*P*) đạt giá trị lớn nhất. (*P*) có vectơ pháp tuyến là:

A. $(1;1;-1)$ **B.** $(1;-1;1)$ **C.** $(1;-2;1)$ **D.** $(2;-1;1)$

Hướng dẫn giải:

- Khoảng cách từ K đến (P) lớn nhất bằng KH, khi H' trùng H

- Vậy mặt phẳng (P) qua MN và vuông góc với KH.



- Tìm H và viết (P) hoặc:

- (P) chứa MN và vuông góc với (MNP).

Gọi H, H’ là hình chiếu của K lên MN và (P).

Ta có: $d(k,(P)) = KH \le KH'$ không đổi.

Vậy $d(K,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi H’ trùng H hay (P) vuông góc với KH.

$\overrightarrow{MK} = (0;1;0); \overrightarrow{NK} = (1;-1;-1)$; $\overrightarrow{MN} = (-1;2;1)$

(MNK) có vtpt là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{NK}\right] = (-1;0;-1)$

Do $\begin{cases} HK \subset (MNK) \\ HK \perp MN \end{cases}$ nên HK có vtcp là $\left[\overrightarrow{MN}, \vec{n}\right] = (2;2;-2)$.

Chọn A.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Có bao mặt phẳng (P) thỏa mãn đầu bài?

A. Có vô số mặt phẳng (P). **B.** Chỉ có một mặt phẳng (P).

C. Không có mặt phẳng (P) nào. **D.** Có hai mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử (P) có phương trình là: $ax + by + cz + d = 0\left(a^2 + b^2 + c^2 \ne 0\right)$

Vì $M \in (P) \Rightarrow c + d = 0 \Leftrightarrow d = -c$.

Vì $N \in (P) \Rightarrow 3b + c + d = 0$ hay $b = 0$ vì $c + d = 0$.

$\Rightarrow (P): ax + cz - c = 0$.

Theo bài ra: $d\left(B,(P)\right) = 2d\left(A,(P)\right) \Leftrightarrow \dfrac{|-2a + 3c - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 2\dfrac{|a - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Leftrightarrow |c - a| = |a - c|$

Vậy có vô số mặt phẳng (P).

Câu 35: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho phương trình mặt phẳng

$\left(\alpha_m\right): 3mx + 5\sqrt{1-m^2}y + 4mz + 20 = 0,\ m \in \left[-1;1\right]$.

Xét các mệnh đề sau:

(I) Với mọi $m \in \left[-1;1\right]$ thì các mặt phẳng $\left(\alpha_m\right)$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu không đổi.

(II) Với mọi $m \neq 0$ thì các mặt phẳng $\left(\alpha_m\right)$ luôn cắt mặt phẳng (Oxz).

(III) $d\left[O;\left(\alpha_m\right)\right] = \sqrt{5}, \forall m \in \left[-1;1\right]$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (II) **B.** Chỉ (I) và (III) **C.** Chỉ (II) và (III) **D.** Cả 3 đều đúng.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có $d\left[O;\left(\alpha_m\right)\right] = \dfrac{\left|20\right|}{\sqrt{9m^2 + 25\left(1-m^2\right) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4$, với mọi $m \in \left[-1;1\right]$.

Do đó với mọi m thay đổi trên $\left[-1;1\right]$ thì các mặt phẳng $\left(\alpha_m\right)$ luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính $R = 4$. Khẳng đinh (I) đúng.

+ Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(\alpha_m\right)$ là $\vec{n} = \left(3m; 5\sqrt{1-m^2}; 4m\right)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là $\vec{j} = \left(0;1;0\right)$.

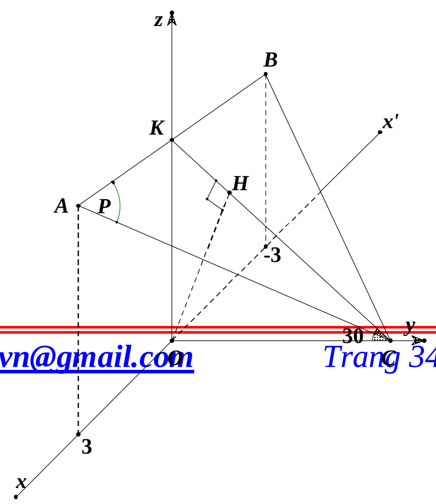
$\left(\alpha_m\right)$ cắt (Oxz) khi và chỉ khi $\left[\vec{n};\vec{j}\right] \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khẳng đinh (II) đúng.

+ Khẳng đinh (III) sai.

Chọn A.

Câu 36: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4), B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Tính khoảng cách từ O đến (P).

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$



Hướng dẫn giải:

Vẽ $OH \perp KC$ với K là giao điểm của AB và trục $z'Oz$.

Ta có: $\hat{C} = 30^0 \Rightarrow \hat{K} = 60^0; OK = 4$

$\Rightarrow d\left(O,P\right)=OH=OK.\sin 60^0$

$=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Chọn D.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V=\dfrac{27}{8}$ **B.** $V=\dfrac{81\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\dfrac{64}{27}$

Hướng dẫn giải:

Theo bài ra hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Mà hai mặt phẳng $(P):4x-4y+2z-7=0$ và $(Q):2x-2y+z+1=0$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng sẽ bằng cạnh của hình lập phương.

Ta có $M(0;0;-1)\in(Q)$ nên $d((Q),(P))=d(M,(P))=\left|\dfrac{-2-7}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right|=\dfrac{3}{2}$

Vậy thể tích khối lập phương là: $V=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$.

Câu 38: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua hai điểm $A(2;0;1)$ và $B(-2;0;5)$ đồng thời hợp với mặt phẳng (Oxz) một góc 45^0. Khoảng cách từ O tới (α) là:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

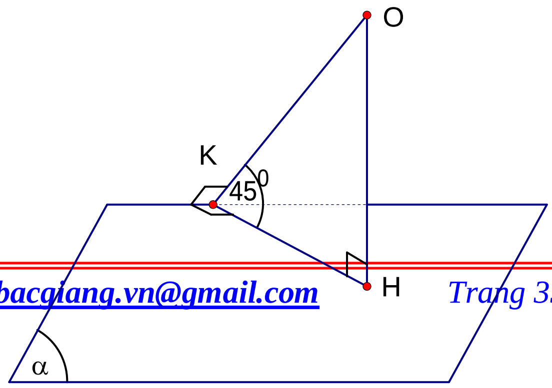
Hướng dẫn giải:

Gọi $K;H$ lần lượt là hình chiếu vuông góc điểm O lên đường thẳng AB và mặt phẳng (α).

Ta có: $A,B\in(Oxz)$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(Oxz)=AB$

$\begin{cases}OH\perp(\alpha)\\OK\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}HK\perp AB\\OK\perp AB\end{cases}$



$\Rightarrow \left(\widehat{(Oxz),(\alpha)}\right) = \left(\widehat{KH,OK}\right) = \widehat{OKH}$

Suy ra tam giác OHK vuông cân tại H

Khi đó: $d\left(O,(\alpha)\right) = OH = \dfrac{OK}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác: $OK = d\left(O,AB\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Khi đó: $d\left(O,(\alpha)\right) = OH = \dfrac{OK}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn A.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x + y + z = 0$ và hai điểm $A(4,-3,1), B(2,1,1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;1) \\ M\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right) \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;1) \\ M\left(\dfrac{17}{7};\dfrac{9}{7};\dfrac{8}{7}\right) \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} M(-1;2;1) \\ M\left(\dfrac{13}{7};-\dfrac{5}{7};-\dfrac{9}{7}\right) \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} M(1;1;1) \\ M\left(\dfrac{9}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(a,b,c).M \in (Q) \Rightarrow a + b + c = 0 \ (1)$.

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi:

$AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b+3)^2 + (c-1)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \Leftrightarrow -a + 2b + 5 = 0 \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + 2b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 5 \\ c = -5 - 3b \end{cases} \quad (*)$

Trung điểm AB là $I(3;-1;1)$. Tam giác ABM cân tại M, suy ra:

$MI = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 = 5 \quad (3)$

Thay $(*)$ và (3) ta được: $(2b+2)^2 + (b+1)^2 + (-6-3b)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2 \\ b = -\dfrac{9}{7} \end{array}\right.$

$b=-2 \Rightarrow a=1, c=1 \Rightarrow M(1;-2;1)$

$b=-\dfrac{9}{7} \Rightarrow a=\dfrac{17}{7}, c=-\dfrac{8}{7} \Rightarrow M\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right)$

Chọn A.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(1;3;2), B(3;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2x-11=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MB=2\sqrt{2}, \widehat{MBA}=30^0$.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;3) \\ M(1;4;1) \end{array}\right.$.   **B.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(1;-4;1) \end{array}\right.$.   **C.** $\left[\begin{array}{l} M(2;1;3) \\ M(4;1;1) \end{array}\right.$.   **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(-1;4;1) \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Nhận thấy $A \in (P), B \notin (P), AB=\sqrt{6}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác MAB ta có:

$MA^2 = MB^2 + BA^2 = 2MB.BA.\cos 30^0 = 2 \Rightarrow MB^2 = MB^2 + BA^2$

Do đó tam giác MAB vuông tại A.

Ta có: $\overrightarrow{u_{AM}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}\right] = (0;-5;5) \Rightarrow AM: \begin{cases} x=1 \\ y=3-t \\ z=2+t \end{cases} \Rightarrow M(1;3-t;2+t)$

Ta có $MA^2 = 2 \Rightarrow t^2 + t^2 = 2 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Với $t=1 \Rightarrow M(1;2;3)$; $t=-1 \Rightarrow M(1;4;1)$

Chọn A.

Câu 41: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2;-2;0)$, $B(3;-2;0)$, $C(3;3;0)$, $D(-2;3;0)$, $M(-2;-2;5)$, $N(-2;-2;5)$, $P(3;-2;5)$, $Q(-2;3;5)$. Hỏi hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng.

A. 3.   **B.** 6.   **C.** 8.   **D.** 9

Hướng dẫn giải:

Vì tám điểm đã chõ tạo nên một hình lập phương, nên hình đa diện tạo bởi tám điểm này có 9 mặt đối xứng.

Chọn D.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;1;4)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1.   **B.** 4.   **C.** 7.   **D.** Vô số.

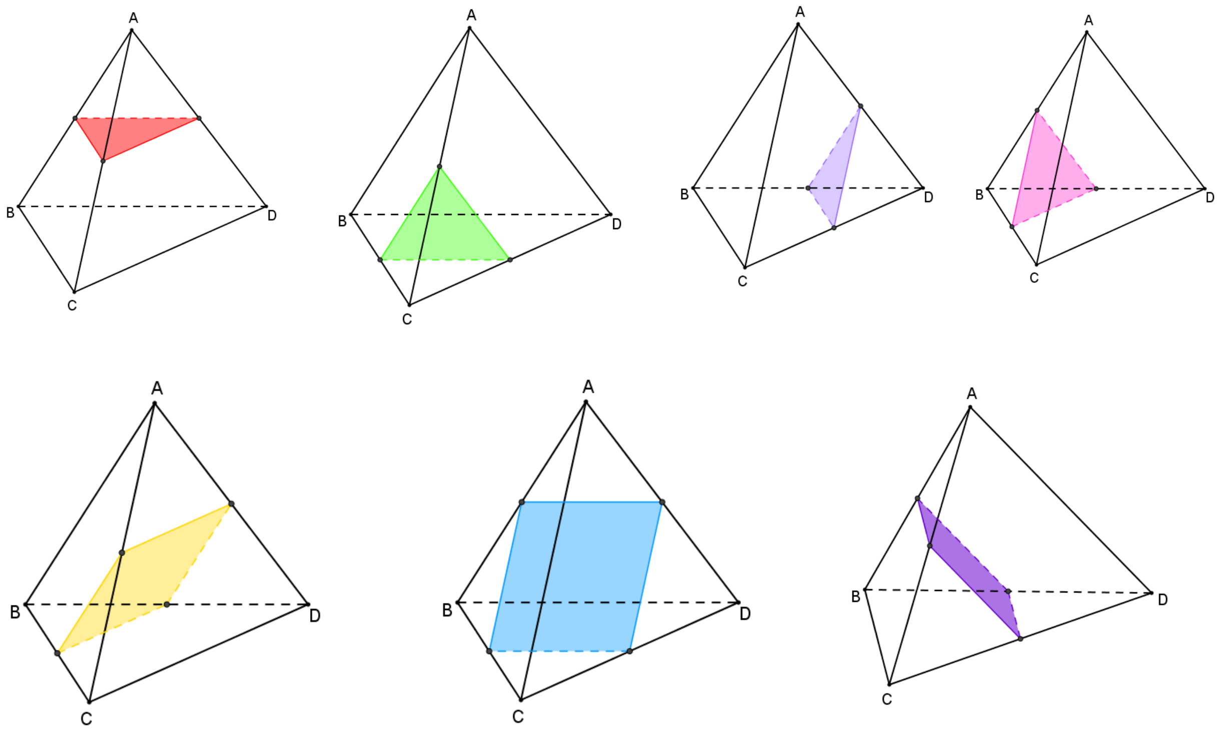
Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;3;4)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;0;-4)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-24\neq 0$.

Do đó A,B,C,D không đồng phẳng và là 4 đỉnh của một tứ diện.

Khi đó sẽ có 7 mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện. Bao gồm: 4 mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh tứ diện và 3 mặt phẳng đi qua trung điểm bốn cạnh tứ diện (như hình vẽ).



Chọn C.

Câu 43: Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$ .Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0c)(a,b,c\neq 0)$

$(\alpha):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha):\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1(*)$

$$OA=OB=OC\neq 0\Rightarrow |a|=|b|=|c|\neq 0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c(1)\\ a=b=-c(2)\\ a=-b=c(3)\\ a=-b=-c(4)\end{array}\right.$$

Thay (1) vào (*) ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào (*) ta được tương ứng $a=-4, a=6, a=\frac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 44: Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra 4 trường hợp sau:

+) TH1: $a=b=c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=14$, nên phương trình mp$(\alpha)$ là $x+y+z-14=0$.

+) TH2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=6$, nên pt mp$(\alpha)$ là $x+y-z-6=0$.

+) TH3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-4$, nên pt mp$(\alpha)$ là $x-y+z+4=0$.

+) TH4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-12$, nên pt mp$(\alpha)$ là $x-y-z+12=0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;0)$, đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$. Biết mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Biết a,b là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1. Hỏi tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ.

Do $H\in\Delta \Rightarrow H(-1-t;3t;2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-t-3;3t+2;t+2)$

Do $AH\perp\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0$ với $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;3;1)$

$\Leftrightarrow -1.(-t-3)+3.(3t+2)+1.(t+2)=0 \Leftrightarrow 11t=-11 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H\left(0;-3;1\right)$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên (P), khi đó: $d(\Delta,(P))=d(H,(P))=HF\le HA$

Suy ra $d(\Delta,(P))_{\max}=HA$. Dấu "=" xảy ra khi $F\equiv A \Rightarrow AH\perp(P)$, hay bài toán được phát biểu lại là:

" Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AH "

Ta có $\overrightarrow{AH}=\left(-2;-1;1\right)=-(2;1;-1)$, suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;1;-1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-2)+y+2-z=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-2=0$.

Do $\begin{cases} a,b\in\mathbb{N}^* \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2,b=1 \\ c=-1,d=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=0$.

Chọn B.

Câu 46: Trong không gain Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-2 \end{cases}$.

Mặt phẳng $\left(P\right):ax+by+cz+d=0$ (với $a;b;c;d\in\mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và chắn d_1,d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a+b+c+d$.

A. -14 **B.** 1 **C.** -8 **D.** -12

Hướng dẫn giải:

Ta có mặt phẳng (P) vuông dóc với đường thẳng d_1 nên (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(1;2;1\right)$.

Phương trình (P) có dạng $\left(P\right):x+2y-z+d=0$.

Gọi M là giáo điểm của (P) với d_1 và N là giao của (P) với d_2 suy ra

$M\left(\dfrac{2-d}{6};\dfrac{2-d}{3};\dfrac{10+d}{6}\right)$, $N\left(\dfrac{-4-d}{3};\dfrac{-1-d}{3};-2\right)$.

Ta có $MN^2=\frac{d^2}{18}+\frac{16d}{9}+\frac{155}{9}$.

Để MN nhỏ nhất thì MN^2 nhỏ nhất, nghĩa là $d=-16$.

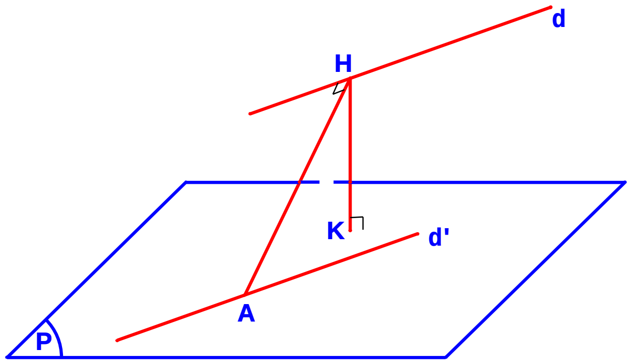
Khi đó $a+b+c+d=-14$.

Chọn A.

Câu 47: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp (P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. **C.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Hướng dẫn giải::



(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).

Ta có $d(d,(P))=HK\le AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow$ $d(d,(P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

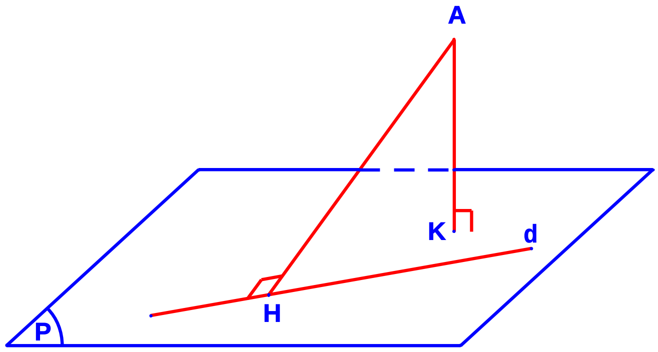
$\Rightarrow \vec{n}_P=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_Q\right]=(98;14;-70)$

$\Rightarrow (P):7x+y-5z-77=0 \Rightarrow d(M,(P))=\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{18}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải::



Gọi H là hình chiếu của A trên d;
K là hình chiếu của A trên (P).

Ta có $d\left(A,(P)\right)=AK\le AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow d\left(A,(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv H$.

Ta có $H(3;1;4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017. **B.** $\dfrac{2014}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2016}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2015}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA

$\Rightarrow (\alpha)$ đi qua điểm $D\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)=a(1;0;0)$

$\Rightarrow (\alpha): x-\dfrac{a}{2}=0$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB

$\Rightarrow (\beta)$ đi qua điểm $E\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OB}=(0;a;0)=a(0;1;0)$

$\Rightarrow (\beta): y-\dfrac{a}{2}=0$.

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC

$\Rightarrow (\gamma)$ đi qua điểm $F\left(0;0;\dfrac{a}{2}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OC}=(0;0;a)=a(0;0;1)$

$\Rightarrow (\gamma): z-\dfrac{a}{2}=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ $\Rightarrow I=(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma)\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Mà theo giả thiết, $a+b+c=2\Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1\Rightarrow I\in(P):x+y+z=1$.

Vậy, $d\left(M,(P)\right)=\frac{|2016-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 50: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}3x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta thấy hai điểm A,B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P) và AB song song với (P).

Điểm $M\in(P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{AB.d(M;AB)}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(M;AB)$ nhỏ nhất, hay $M\in\Delta=(P)\cap(Q),(Q)$ là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, vtpt của (P) $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;-1)$

Suy ra vtpt của (Q): $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(-1;7;4)$

PTTQ $(Q):-1(x-1)+7y+4(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x-7y-4z+7=0$

Quỹ tích M là $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(a;a;0)\Rightarrow C'(a;a;b)\Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\left(0;-a;-\frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$ và $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b)$

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{MB};\overrightarrow{BD}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$ và $\left[\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'B}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)$

Chọn $\vec{v}=(1;1;1)$ là VTPT của $(A'BD)$

$(A'BD)\perp(MBD)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}-a^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow \frac{a}{b}=1$

Cách 2.

$AB=AD=BC=CD=a\Rightarrow \begin{cases}A'B=A'D\\ MB=MD\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}A'X\perp BD\\ MX\perp BD\end{cases}$ với X là trung điểm BD

$\Rightarrow \left[\widehat{(A'BD);(MBD)}\right]=\left(\widehat{A'X;MX}\right)$

$X\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ là trung điểm BD

$\overrightarrow{A'X}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-b\right)$, $\overrightarrow{MX}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

$(A'BD)\perp(MBD)\Rightarrow A'X\perp MX$

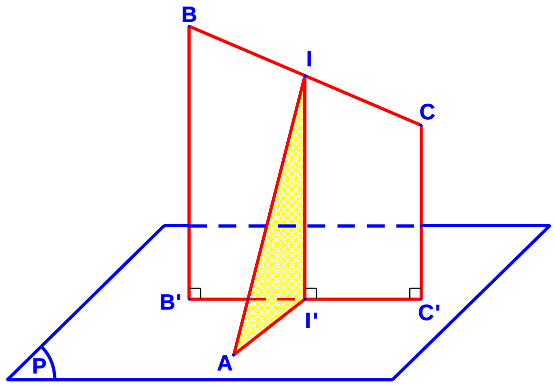
$\Rightarrow \overrightarrow{A'X}.\overrightarrow{MX}=0\Rightarrow -\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{b^2}{2}=0\Rightarrow \frac{a}{b}=1$

Câu 52: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1);B(3;-2;0);C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. **B.** $F(3;0;-2)$. **C.** $E(1;3;1)$. **D.** $H(0;3;1)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm đoạn BC; các điểm B',C',I' lần lượt là hình chiếu của B,C,I trên (P).



Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

$\Rightarrow d(B,(P))+d(C,(P))=BB'+CC'=2II'$.

Mà $II'\le IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B,(P))+d(C,(P))$ lớn nhất khi $I'\equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overrightarrow{IA}$ với $I(2;0;-1)$.

$\Rightarrow (P):-x+2z-1=0 \Rightarrow E(1;3;1)\in(P)$.

Câu 53: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz,$ cho các điểm $A(1;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $b+c=1.$ **B.** $2b+c=1.$ **C.** $b-3c=1.$ **D.** $3b+c=3.$

Hướng dẫn giải:

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow b=c\,(1)$

Ta có $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow b+c=1$.

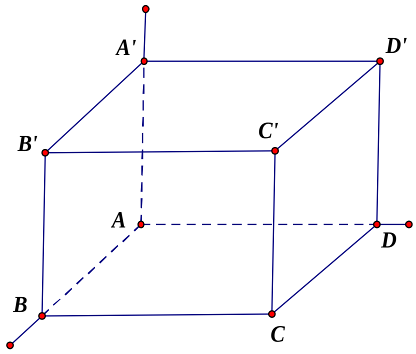
Câu 54: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:



$A(0;0;0)$ $B(2;0;0)$ $C(2;2;0)$ $D(0;2;0)$

$A'(0;0;2)$ $B'(2;0;2)$ $C'(2;2;2)$ $D'(0;2;2)$

$\overrightarrow{AB'}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;2;2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2;2;0)$, $\overrightarrow{BC'}=(0;2;2)$

* Mặt phẳng $(AB'D')$ qua $A(0;0;0)$ và nhận véctơ

$\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(-1;-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Phương trình $(AB'D')$ là: $x+y-z=0$.

* Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{m}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC'}\right]=(1;1;-1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Phương trình $(BC'D)$ là: $x+y-z-2=0$.

Suy ra hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BC'D)$:

$d\left(A,(BC'D)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách khác: Thấy khoảng cách cần tìm $d\left((AB'D'),(BC'D)\right)=\frac{1}{3}AC'=\frac{1}{3}.2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 55: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA=SB=SC$.

A. $V=\frac{145}{6}$. **B.** $V=145$. **C.** $V=\frac{45}{6}$. **D.** $V=\frac{127}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $S(a;b;c)\in(P) => a+b+c+5=0\ (1)$.

Ta có: $AS=\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}$,

$BS=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}, CS=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}$

Do $SA=SB=SC \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\\ \sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\ 4a+2c-15=0\end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} 4a+6b-8c-21=0 \\ 4a+2c-15=0 \\ a+b+c+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-\dfrac{23}{2} \\ c=-\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow S=\left(6;-\dfrac{13}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$. Lại có:

$\overrightarrow{AB}(-4;-3;3), \overrightarrow{AC}(-2;0;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;-10;-6); \overrightarrow{AS}=\left(1;-\dfrac{23}{2};-\dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AS}\right|=145 \Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{145}{6}$

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG NÂNG CAO

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec tơ chỉ phương

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{a}\neq\vec{0}:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$$

Nếu $a_1;a_2;a_3$ đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Ngoài ra đường thẳng còn có dạng tổng quát là: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

với $\forall A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ thỏa $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0, A_2^2+B_2^2+C_2^2>0.$

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases};\ d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $\vec{u},\vec{u'}$ ***cùng phương:*** $d//d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\notin d'\end{cases};d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\in d'\end{cases}$ $\vec{u},\vec{u'}$ ***không cùng phương:*** $\begin{cases}x_0+a_1t=x_0'+a_1't'\\y_0+a_2t=y_0'+a_2't'\\z_0+a_3t=y_0'+a_3't'\end{cases}\ (I)$ d chéo d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm d cắt d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có 1 nghiệm	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng*** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases};\ d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $(d)//(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\notin d'\end{cases}$ $(d)\equiv(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$ (d) cat $(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]\neq\vec{0}\\[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}=0\end{cases}$ (d) *cheo* $(d')\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}\neq0$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian $Oxyz$ cho:	Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vtcp: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và

<table>
<tr>
<td>(α):Ax+By+Cz+D=0 và $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$
Pt:
$A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0(1)$
Phương trình (1) vô nghiệm thì $d//(\alpha)$
Phương trình (1) có 1 nghiệm thì d cắt (α)
Phương trình (1) có vô số nghiệm thì $d\in(\alpha)$
Đặc biệt: $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a},\vec{n}$ cùng phương</td>
<td>(α):Ax+By+Cz+D=0 có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$
(d) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\neq 0$
$(d)//(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\notin(\alpha)\end{cases}$
(d) nằm trên mp (α) $\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\in(\alpha)\end{cases}$</td>
</tr>
</table>

4. Khoảng cách

<table>
<tr>
<td colspan="2">Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α):Ax+By+Cz+D=0 cho bởi công thức
$d(M_0,\alpha)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
Phương pháp 1:
Lập ptmp (α) đi qua M và vuông góc với d.
Tìm tọa độ giao điểm H của mp (α) và d
$d(M,d)=MH$
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau
Phương pháp 1:
d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$
d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$
Lập phương trình mp (α) chứa d và song song với d’: $d(d,d')=d(M',(\alpha))$</td>
<td>Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
Phương pháp 2:
(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)
$d(M,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau
Phương pháp 2:
d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$
d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$
$d(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right]\right|}=\dfrac{V_{hop}}{S_{day}}$</td>
</tr>
</table>

5. Góc giữa hai đường thẳng

□ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{a'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng $(\alpha): \sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường thẳng Δ song song với $d: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+2}{1}$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{1}$. Phương trình nào không phải đường thẳng Δ

A. $\Delta: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{1}$

B. $\Delta: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-\frac{7}{3}}{-4} = \dfrac{z-\frac{2}{3}}{1}$

C. $\Delta: \dfrac{x+9}{3} = \dfrac{y+7}{-4} = \dfrac{z+2}{1}$

D. $\Delta: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-1}{1}$

Hướng dẫn giải:

Giải: Gọi M, N là giao điểm của Δ và d_1, d_2.

Khi đó M, N thuộc d_1, d_2 nên $\begin{cases} x_M = 1+3t \\ y_M = -1+t \\ z_M = 2+2t \end{cases}, \begin{cases} x_N = -2+2t' \\ y_N = 3+4t' \\ z_N = t' \end{cases}$.

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN} = (-3+2t'-3t; 4+4t'-t; -2+t'-2t)$

Δ song song với $d: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+2}{1}$ nên $\dfrac{-3+2t'-3t}{3} = \dfrac{4+4t'-t}{-4} = \dfrac{-2+t'-2t}{1}$

Giải hệ ta được $t' = -1; t = -\dfrac{4}{3}$. Vậy $N(-4;-1;-1), M\left(-3; -\dfrac{7}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$

Vậy $\Delta: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{1}$

Chọn A.

Câu 2: Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$ và mp (P) $: x+y-2=0$. Tìm phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với (d).

A. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+2t \\ z = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 1+3t \\ z = 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1-2t \\ z = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là giao điểm của (d) và (P): $I(1-t;1-t;2t), I\in(P)\Rightarrow t=0\Rightarrow I(1;1;0)$

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-1;2)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;0)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ =(-2 ;2 ;0)

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+2t\\ z=0\end{cases}$

Chọn A.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d:\begin{cases}x=-3+t\\ y=1-2t\\ z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B. $d:\begin{cases}x=3t\\ y=2+t\\ z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases}x=-2-4t\\ y=-1+3t\\ z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D. $d:\begin{cases}x=-1-t\\ y=3-3t\\ z=3-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Vectơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}_\Delta(1;1;-1)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;2)$.

Vì $\begin{cases}d\perp\Delta\\ d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta\\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_{(P)}\right]=(4;-3;1)$.

Tọa độ giao điểm $H=\Delta\cap(P)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=2-t\\ x+2y+2z-4=0\end{cases}\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;-1;4).$$

Lại có $(d;\Delta)\cap(P)=d$, mà $H=\Delta\cap(P)$. Suy ra $H\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $H(-2;-1;4)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(4;-3;1)$ nên có phương trình

$$d:\begin{cases}x=-2-4t\\ y=-1+3t\\ z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_p}=(1;2;-1)$, ta có $\left[\overrightarrow{n_p},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;-3;-3)$

Vì $\Delta\subset(P),\Delta\perp d\Rightarrow VTPT\ \overrightarrow{u_\Delta}=\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=(0;-1;1)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng $(Q): y-z+m=0$

Chọn $A(1;-2;0)\in d$, ta có:

$d\left(A;(Q)\right)=d\left(\Delta;d\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=0\end{array}\right.$

Với $m=4\Rightarrow(Q): y-z+4=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $B(7;0;4)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$

Với $m=0\Rightarrow(Q): y-z=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $C(3;0;0)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

Chọn A.

Câu 5: Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases}x=t\\ y=7-3t\\ z=2t\end{cases}$.　**B.** $\begin{cases}x=t\\ y=7+3t\\ z=2t\end{cases}$.　**C.** $\begin{cases}x=-t\\ y=7-3t\\ z=2t\end{cases}$.　**D.** $\begin{cases}x=2t\\ y=7-3t\\ z=t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:

$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y-7=0$.

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases}3x+y-7=0\\x+y+z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=7-3x\\z=2x\end{cases}$.

Vậy phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của $d,(P)$. Tìm $M\in(P)$ sao cho MI vuông góc với d và $MI=4\sqrt{14}$.

A. $\left[\begin{array}{l}M(5;9;-11)\\M(-3;-7;13)\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}M(5;7;-11)\\M(-3;-7;13)\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}M(-5;9;-11)\\M(3;-7;13)\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}M(5;-7;11)\\M(3;7;-13)\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Vì $I\in d$ nên $I(2+t;-1-2t;-t)$.

Hơn nữa $I\in(P)\Rightarrow 2+t-1-2t-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow I(1;1;1)$

Gọi $M(a;b;c)$. Do: $\begin{cases}M\in(P)\Rightarrow a+b+c=3\\MI\perp d\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow a-2b-c+2=0\end{cases}$

$\left(\overrightarrow{IM}=(a-1;b-1;c-1),\overrightarrow{u_d}=(1;-2;-1)\right)$

Do $MI=4\sqrt{14}\Rightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a+b+c=3\\a-2b-c+2=0\\(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\c=4-3a\\(a-1)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=9\\c=-11\end{cases}\cup\begin{cases}a=-3\\b=-7\\c=13\end{cases}$$

Với $(a;b;c)=(5;9;-11)\Rightarrow M(5;9;-11)$

Với $(a;b;c)=(-3;-7;13)\Rightarrow M(-3;-7;13)$

Chọn A.

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0,(Q):2x+2y+z-1=0$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng (Q) và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^0.

A. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$.
B. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=2t-1\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1\end{cases}$.

C. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t-1\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=3t\\y=-t\\z=1+4t\end{cases}$.
D. $d_1:\begin{cases}x=1+4t\\y=1-t\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\vec{n}=(2;2;1)$ là vecto pháp tuyến của (Q), $\vec{b}=(1;-2;2)$ là vec tơ pháp tuyến của (P).

Gọi $\vec{a}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một vecto chỉ phương của d.

Vì đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$ mà $A(0;0;1), A\in(Q)$

Do đó $d\subset(Q)\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2a+2b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-2b$

Góc hợp bởi d và (P) bằng 45^0:

$$\Leftrightarrow \sin 45^0=\left|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18(a^2+b^2+c^2)=4(a-2b+2c)^2\Leftrightarrow a=\pm b$$

$a=b\,(b=1\Rightarrow a=1;c=-4)$

$a=-b\,(b=-1\Rightarrow a=1;c=0)$

Vậy $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$ là các đường thẳng cần tìm.

Chọn A.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB,CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1;-1;0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng CD qua $M(2;-1;3)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$

Gọi $H(2+2t;-1+2t;3+t)$ là hình chiếu của A lên CD, ta có:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=2(3+2t;2.2t+(3+t)\Rightarrow t=-1\Rightarrow H(0;-3;2), d(A,CD)=AH=3$

Từ giả thiết ta có:

$$AB+CD=3AB=\frac{2S_{ABCD}}{AH}=18\Rightarrow AB=6; DH=3; HC=9$$

Đặt $\overrightarrow{AB}=t\vec{u}=(2t;2t;t)\Rightarrow t>0\left(x_B>x_A\right)\Rightarrow t=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\vec{u}\right|}=2\Rightarrow \overrightarrow{AB}(4;4;2)\Rightarrow B(3;3;2)$

$\overrightarrow{HC}=\dfrac{9}{6}\overrightarrow{AB}=(6;6;3)\Rightarrow C(6;3;5)$

$\overrightarrow{HD}=-\dfrac{3}{6}\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)\Rightarrow D(-2;-5;1)$

Chọn A.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$; $d_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1,d_2 lần lượt tại A,B sao cho độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. **D.** $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

Hướng dẫn giải:

Vì $A\in d_1;B\in d_2\Rightarrow A(-1+a;-2+2a;a),B(2+2b;1+b;1+b)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-a+2b+3;-2a+b+3;-a+b+1)$

(P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-2),AB//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\ A\notin(P)\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\Leftrightarrow -a+2b+3-2a+b+3+2a-2b-2=0\Leftrightarrow b=a-4\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(a-5;-a-1;-3)$

Do đó: $AB=\sqrt{(a-5)^2+(-a-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{2(a-2)^2+27}\geq 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \min AB=3\sqrt{3}$ khi $a=2\Rightarrow A(1;2;2)$

$\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-3),A(1;2;2)\notin(P)$

Vậy phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn A.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm giữa d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\\ z=-1-t\end{cases}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$, d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$

Vì $M=d\cap(P)\Rightarrow M(1;-3;0)$

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên: $VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó: $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+2=0\\ 2x-3y+z-11=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}N(5;-2;-5)\\ N(-3;-4;5)\end{array}\right.$

Với $N(5;-2;-5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$

Với $N(-3;-4;5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$

Chọn A.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(1;2;3)$, đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Gọi d' là đường thẳng đối xứng với d qua (P). Tìm tọa độ điểm B trên d' sao cho $AB=9$.

A. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{62-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{62-\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} B\left(\frac{16\sqrt{151}}{27};\frac{2\sqrt{151}}{27};\frac{8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\frac{-16\sqrt{151}}{27};\frac{-2\sqrt{151}}{27};\frac{-8\sqrt{151}}{27}\right) \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} B\left(\frac{62+4\sqrt{151}}{27};\frac{-26+2\sqrt{151}}{27};\frac{31+8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\frac{62-4\sqrt{151}}{27};\frac{-26-2\sqrt{151}}{27};\frac{31-8\sqrt{151}}{27}\right) \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Có d cắt (P) tại $I(2;-1;1)$. Chọn $M(0;0;-1)\in d$ và M' là điểm đối xứng của M qua (P). Khi đó $M'\in(d')$. Ta tìm M'.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P)

$\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=VTPT\ \overrightarrow{n_P}=(1;2-1)\Rightarrow \Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$

Gọi H là trung điểm MM' thì tọa độ H định:

$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}\\ x+2y-z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3};y=-\frac{2}{3};z=-\frac{2}{3}\Rightarrow H\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Từ đó: $M'(2x_H-x_M;2y_H-y_M;2z_H-z_M)=\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Suy ra d’ là đường thẳng đi qua $I(2;-1;1)$ nhận VTCP:

$\overrightarrow{M'I}=\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow d':\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{4}$

$B\in d'\Rightarrow B(2+8t;-1+t;1+4t)$

Theo đề bài ta phải có:

$AB=9\Leftrightarrow(1+8t)^2+(t-3)^2+(4t-2)^2=81\Leftrightarrow 81t^2-6t-67=0\Leftrightarrow t=\frac{1\pm2\sqrt{151}}{27}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} B\left(\frac{62+16\sqrt{151}}{27};\frac{-26+2\sqrt{151}}{27};\frac{31+8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\frac{62-16\sqrt{151}}{27};\frac{-26-2\sqrt{151}}{27};\frac{31-8\sqrt{151}}{27}\right) \end{array}\right.$

Chọn A.

Câu 12: Cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại $B,\ C$ sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM là đường trung tuyến.

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ **B.** $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $B(a;b;c)$, từ giả thiết suy ra M là trung điểm của BC, suy ra $C(2-a;4-b;6-c)$.

$B\in(P)$, $C\in(Q)$ nên có hai pt: $a+b-2c+1=0$ (1); $-a+2b+c-8=0$ (2).

$\overrightarrow{AM}(-1;-2;-1)$, $\overrightarrow{BC}(2-2a;4-2b;6-2c)$.

Tam giác ABC cân tại A nên: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow a+2b+c-8=0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có hệ: $\begin{cases}a+b-2c+1=0\\-a+2b+c-8=0\\a+2b+c-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=3\\c=2\end{cases}\Rightarrow B(0;3;2)$, $C(2;1;4)$.

Đường thẳng Δ qua B và C có pt $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Chọn D.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$, cắt $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$, sao cho $\cos(d;\Delta_2)$ là nhỏ nhất, biết phương trình của đường thẳng $\Delta_2:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình đường thẳng d là?

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **B.** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-2}$

C. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{-2}$ **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M=d\cap\Delta_1\Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$.

d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;2;2)$.

$\cos(d;\Delta_2)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f(t)=f(0)=0$.

Do đó $\min\left[\cos(d;\Delta_2)\right]=0$ khi $t=0$. Nên $\overrightarrow{AM}=(2;2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn A.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải:

Do Δ cắt d nên tồn tại giao điểm giữa chúng. Gọi $B=\Delta\cap d\Leftrightarrow\begin{cases}B\in\Delta\\B\in d\end{cases}$.

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=t+1\\y=t\\z=t-1\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Do $B\in d$, suy ra $B(t+1;t;t-1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$

Do $A,B\in\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Theo đề bài, Δ vuông góc d nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ($\vec{u}=(1;1;2)$ là vector chỉ phương của d). Suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$. Giải được $t=1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Vậy $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn B.

Câu 15: Trong không gian tọa độ Oxyz cho M(2;1;0) và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d. Viết phương trình đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=3-2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

PTTS của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d, đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng MH.

Vì H thuộc d nên $H(1+2t;-1+t;-t)$ suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-1;-2+t;-t)$.

Vì $MH \perp d$ và d có 1 VTCP là $\vec{u} = (2;1;-1)$ nên $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$. Do đó

$\overrightarrow{MH} = \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-4}{3};\dfrac{-2}{3}\right)$

Vậy PTTS của Δ là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$.

Chọn A.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $MN \Rightarrow N(-t;-5-2t;1+t)$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+1}{-2}$. **C.** $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{AM} = (2t+2;t+2;-1-t)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (-1;2;2)$

$\cos(d;\Delta_2) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Do đó $\min\left[\cos(\Delta,d)\right] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;2-1)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t \\ z=-1+2t \end{cases}$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=6-t \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=6 \\ y=\dfrac{5}{2}-t \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\dfrac{5}{2}+t \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

$A\in d_1 \Rightarrow A(1+2a;a;-2-a)$

$B\in d_2 \Rightarrow B(1+b;-2+3b;2-2b)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(b-2a;3b-a-2;-2b+a+4)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Vì $\Delta//(P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow b=a-1$.Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-a-1;2a-5;6-a)$

$$AB=\sqrt{(-a-1)^2+(2a-5)^2+(6-a)^2}$$
$$=\sqrt{6a^2-30a+62}$$
$$=\sqrt{6\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\ge\frac{7\sqrt{2}}{2};\forall a\in\mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\dfrac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{7}{2};0;\dfrac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6;\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=6-t \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=-\dfrac{9}{2}+t \end{cases}$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P): 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$. **D.** $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$

$A \in d_1 \Rightarrow A(2a; 1-a; -2+a)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2b; 1+b; 3)$

$\overrightarrow{AB} = (-2a+2b-1; a+b; -a+5)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (7;1;-4)$, $d \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-1 = 7k \\ a+b = k \\ -a+5 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-7k = 1 \\ a+b-k = 0 \\ -a+4k = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ k = -1 \end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_P} = (7;1-4)$

Vậy phương trình của d là $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1+t \\ z = 4+t \end{cases}$ và cắt hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ là:

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3-t \\ z = 3-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3-t \\ z = -3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3+t \\ z = -3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3+t \\ z = 3+t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=\Delta\cap\Delta_1, B=\Delta\cap\Delta_2$

$A\in\Delta_1\Rightarrow A(-1+3a;2+a;1+2a)$
$B\in\Delta_2\Rightarrow B(1+b;2b;-1+3b)$
$\overrightarrow{AB}=(-3a+b+2;-a+2b-2;-2a+3b-2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(0;1;1)$

$\Delta//d\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a_d}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+2=0\\-a+2b-2=k\\-2a+3b-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b=-2\\-a+2b-k=2\\-2a+3b-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\k=-1\end{cases}$$

Ta có $A(2;3;3);B(2;2;2)$

Δ đi qua điểm $A(2;3;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;-1;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2\\y=3-t\\z=3-t\end{cases}$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha))<R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-(d(I,\Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I,(\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α). Phương trình $BH:\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$

$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(-2;\ 7;\ 3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ. Phương trình của $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Câu 21: Phương trình nào sau đây không phải là phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t, t\in R \\ z=3+t \end{cases}$ trên mặt phẳng (Oxy):

A. $\begin{cases} x=3+2t' \\ y=1+3t', t'\in R \\ z=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+4t' \\ y=-2+6t', t'\in R \\ z=0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=2+3t', t'\in R \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=5-2t' \\ y=4-3t', t'\in R \\ z=0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

A(1;-2;3), B(3;1;4) thuộc d. Hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (Oxy) là $A'(1;-2;0)$, $B'(3;1;0)$

Phương trình hình chiếu đi qua A' hoặc B' và nhận véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{A'B'}=(2;3;0)$ làm véc tơ chỉ phương.

Chọn C.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1:

Gọi $A=d\cap(P)$

$A\in d \Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A\in(P) \Rightarrow a=-3 \Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

$BH:\begin{cases}x=12+3t\\y=9+5t\\z=1-t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H(12+3t;9+5t;1-t)$

$H\in(P)\Rightarrow t=-\dfrac{78}{35}\Rightarrow H\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}}=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Cách 2:

- Gọi (Q) qua d và vuông góc với (P)

d đi qua điểm $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(4;3;1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

(Q) qua $B(12;9;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-8;7;11)$

$(Q):8x-7y-11z-22=0$

- d' là giao tuyến của (Q) và (P)

Tìm một điểm thuộc d', bằng cách cho $y=0$

Ta có hệ $\begin{cases}3x-z=2\\8x-11z=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}\Rightarrow M(0;0;-2)\in d'$

d' đi qua điểm $M(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ BH cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Hình chiếu song

$$BH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

song của $\overrightarrow{a_{BH}} = \overrightarrow{n_Q} = (1; -2; 2)$ lên mặt phẳng $H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ theo

$$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$$

phương $\Delta: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 0 \\ z = 5 - 4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

$$BH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Giao điểm của d và mặt phẳng $H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ là: $M_0(5; 0; 5)$.

$$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$$

Trên $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ chọn M bất kỳ không trùng với $M_0(5; 0; 5)$; ví dụ: $M(1; -2; 3)$. Gọi A

$$BH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

là hình chiếu song song của M lên mặt phẳng $H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ theo

$$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$$

phương $\Delta: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

+/ Lập phương trình *d'* đi qua *M* và song song hoặc trùng với $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

$$BH:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$$

+/ Điểm A chính là giao điểm của *d'* và $H\in BH\Rightarrow H\left(1+t;-1-2t;3+2t\right)$

$$H\in\left(P\right)\Rightarrow t=-\frac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$$

+/ Ta tìm được $A(3;0;1)$

Hình chiếu song song của $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$ lên mặt phẳng

$BH:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H\left(1+t;-1-2t;3+2t\right)$ theo phương $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ là đường thẳng

$H\in\left(P\right)\Rightarrow t=-\dfrac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$

đi qua $M_0(5;0;5)$ và $A(3;0;1)$.

Vậy phương trình là: $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $\left(Q\right):x-2y+2z+1=0$ gọi d đi qua $A\left(3;-1;1\right)$, nằm trong mặt phẳng $\left(P\right):x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=-1-15t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=1-15t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=1\end{cases}$ **và** $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=1-15t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=\left(1;2;2\right)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$

$d\subset(P)\Rightarrow\overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow b=a+c;\ (1)$

$(\Delta,d)=45^0\Leftrightarrow\cos(\Delta,d)=\cos45^0$

$$\Leftrightarrow\frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+2b+2c)^2=9(a^2+b^2+c^2);\ (2)$$

Từ $\Delta_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$, ta có: $14c^2+30ac=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\15a+7c=0\end{array}\right.$

Với $c=0$, chọn $a=b=1$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=1\end{cases}$

Với $15a+7c=0$, chọn $a=7\Rightarrow c=-15;b=-8$, phương trình đường thẳng d là

$\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=1-15t\end{cases}$

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-7}$.

Hướng dẫn giải:

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;-2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1)$

Vì $d\subset(P)$ nên $\overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{a_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 2a-b-c=0\Leftrightarrow c=2a-b$

$$\cos(\Delta,d)=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}$, ta có: $\cos\left(\Delta,d\right)=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{\left(5t-4\right)^2}{5t^2-4t+2}}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{\left(5t-4\right)^2}{5t^2-4t+2}$, ta suy ra được: $\max f\left(t\right)=f\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max\left[\cos\left(\Delta,d\right)\right]=\sqrt{\dfrac{5\sqrt{3}}{27}}\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{5}$

Chọn $a=1\Rightarrow b=-5,c=7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$

Chọn A.

Câu 26: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x-17y-20z-77=0.$ **B.** $19x-17y-20z+34=0.$

C. $31x-8y-5z+91=0.$ **D.** $31x-8y-5z-98=0.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=\left(3;1;2\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(3;0;-1\right)$ và có VTCP là $\vec{u}=\left(1;2;3\right)$.

Do $\Delta\subset\left(P\right)$ nên $M\in\left(P\right)$. Giả sử VTPT của $\left(P\right)$ là $\vec{n}=\left(A;B;C\right),\left(A^2+B^2+C^2\neq0\right)$.

Phương trình $\left(P\right)$ có dạng $A\left(x-3\right)+By+C\left(z+1\right)=0$.

Do $\Delta\subset\left(P\right)$ nên $\vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow A+2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B-3C$.

Gọi α là góc giữa d và $\left(P\right)$. Ta có

$$sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|3A+B+2C\right|}{\sqrt{14}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|3\left(-2B-3C\right)+B+2C\right|}{\sqrt{14}.\sqrt{\left(-2B-3C\right)^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{\left|5B+7C\right|}{\sqrt{14}.\sqrt{5B^2 12BC+10C^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{\left(5B+7C\right)^2}{5B^2+12BC+10C^2}}.$$

TH1: Với $C=0$ thì $sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C\neq 0$ đặt $t=\frac{B}{C}$ ta có $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{-50t^2+10t+112}{(5t^2+12t+10)^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -50t^2+10t+112=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5}\Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{75}{14} \\ t=-\frac{7}{5}\Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right)=0 \end{array}\right..$$

Và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}=5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{75}{14}$	$\searrow$	5

Từ đó ta có $Maxf(t)=\frac{75}{14}$ khi $t=\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$. Khi đó $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)}=\frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và Th2 ta có $sin\alpha$ lớn nhất là $sin\alpha=\frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$.

Chọn $B=-8\Rightarrow C=-5\Rightarrow A=31$.

Phương trình (P) là $31(x-3)-8y-5(z+1)=0\Leftrightarrow 31x-8y-5z-98=0$.

Câu 27: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$; $d':\begin{cases} x=3-t' \\ y=1+t' \\ z=1-2t' \end{cases}$.

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30^{O}. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải::

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$MM' \,//\, (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{n_P} \end{cases} \Leftrightarrow t'=-2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'}(4-t;-1-t;3-2t)$

Ta có $\cos 30^{\text{O}} = \cos\left(\overrightarrow{MM'},\vec{u}_d\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1:\begin{cases} x=5 \\ y=4+t \\ z=10+t \end{cases}$; $\Delta_2:\begin{cases} x=t' \\ y=-1 \\ z=t' \end{cases}$.

Khi đó, $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{1}{2}$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{AM}{BM}=2$. **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{AM}{BM}=3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1) \Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và

Ta có: A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-9;0;0)$.

và $\overrightarrow{BM}=\left(-14;-6;-2\right) \Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB.$

Chọn A.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B\left(1;2;-3\right)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;1;6)$ **B.** $\vec{u}=(2;2;-1)$ **C.** $\vec{u}=(25;-29;-6)$ **D.** $\vec{u}=(1;0;2)$

Hướng dẫn giải:

Cách 1 (Tự luận**)**

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, B’ là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB’ và $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{B'A}}$

Ta có $\left(P\right):\begin{cases}Qua\ \ A(-2;-2;1)\\ VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)\end{cases} \Rightarrow (\mathrm{P}):2x+2y-z+9=0$

Gọi d’ là đường thẳng qua B và song song d’ $\Rightarrow d'\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

B’ là giao điểm của d’ và (P) $\Rightarrow B'(-3;-2;-1) \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{B'A}=(1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Cách 2: Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Gọi d’ là đường thẳng qua B và song song d’ $\Rightarrow d'\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

B’$\in$ d’$\Rightarrow \overrightarrow{B'A}=\left(-2t-3;-2t-4;t+4\right)$

AB’$\perp$ d $\Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{B'A}=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{B'A}=(1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Câu 30: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm $A\left(1;2;-1\right), B\left(7;-2;3\right)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=2+3t\\ y=-2t\\ z=4+2t\end{cases}$ $(\mathrm{t}\in\mathrm{R})$. Điểm M trên d sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là nhỏ nhất có tổng các tọa độ là:

A. $M=\left(2;0;4\ \right)$. **B.** $M=\left(2;0;1\right)$. **C.** $M=\left(1;0;4\ \right)$. **D.** $M=\left(1;0;2\ \right)$.

Hướng dẫn giải:

Nếu M nằm trên d thì điểm I có tọa độ là M=(2+3t;-2t;4+2t). Từ đó ta có:

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=(3t+1;-2-2t;2t+5)\Rightarrow AM=\sqrt{(3t+1)^2+(2+2t)^2+(2t+5)^2}$

Tương tự: $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=(3t-5;2-2t;2t+1)\Rightarrow BM=\sqrt{(3t-5)^2+(2-2t)^2+(2t+1)^2}$

Từ (*): MA=MB $=\sqrt{(3t+1)^2+(2+2t)^2+(2t+5)^2}=\sqrt{(3t-5)^2+(2-2t)^2+(2t+1)^2}$

Hay: $\Leftrightarrow \sqrt{17t^2+34t+30}=\sqrt{17t^2-36t+30}\Leftrightarrow 34t+36t=0-11\Leftrightarrow 70t=0\to t=0$

Tọa độ M thỏa mãn yêu cầu là: M=(2;0;4).

Chọn A.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz,$ cho điểm $A(2;3;0),\ B(0;-\sqrt{2};0),\ M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2-t\end{cases}$.Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhấ thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$.   **B.** 4.   **C.** 2.   **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Do AB có độ dài không đổi nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $AC+CB$ nhỏ nhất.

Vì $C\in d\Rightarrow C(t;0;2-t)\Rightarrow AC=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9},\ BC=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}$

$\Rightarrow AC+CB=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}.$

Đặt $\vec{u}=\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2};3\right),\ \vec{v}=\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};2\right)$ ápdụngbấtđẳngthức $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}\ge\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2+25}.$ Dấubằngxảyrakhivàchỉ khi $\frac{\sqrt{2}t-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}t+\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=\frac{7}{5}\Rightarrow C\left(\frac{7}{5};0;\frac{3}{5}\right)\Rightarrow CM=\sqrt{\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{5}\right)^2+2+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2}=2.$

Chọn C.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ., cho bốn điểm. và. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm $A,\ B,\ C$ đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(-1;-2;1\right)$. **B.** $N\left(5;7;3\right)$. **C.** $P\left(3;4;3\right)$. **D.** $Q\left(7;13;5\right)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có phương trình mặt phẳng qua A,B,C là: $\left(ABC\right):\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Dễ thấy $D\in\left(ABC\right)$.Gọi. lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên d.

Suy ra $d\left(A,d\right)+d\left(B,d\right)+d\left(C,d\right)=AA'+BB'+CC'\le AD+BD+CD$.Dấu bằng xảy ra khi $A'\equiv B'\equiv C'\equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ các điểm $A,\ B,\ C$ đến d lớn nhất khi d là đường thẳng qua D và vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)=>d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+3t\\ z=1+t\end{cases};N\in d$

chọn B.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU NÂNG CAO

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa mặt cầu

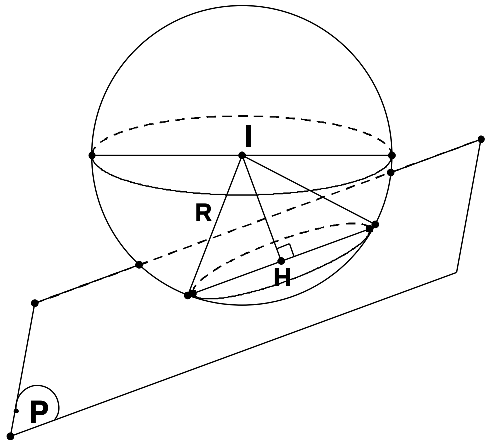
Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$.

Trong không gian với hệ trục Oxyz :

- Mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

- Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

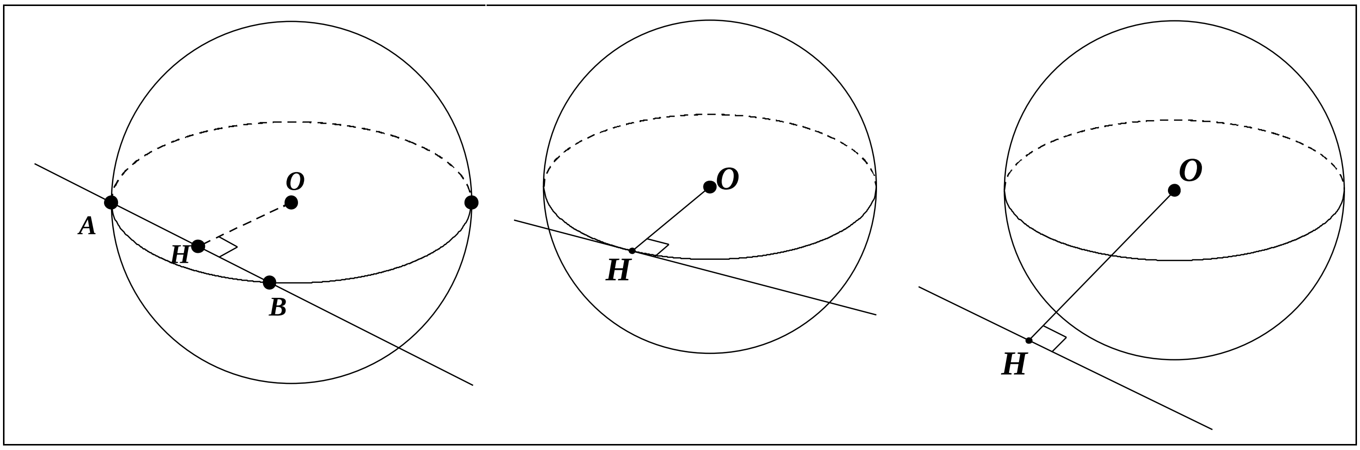
2. Vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)



- $d(I,(P))>R$ khi và chỉ khi (P) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(P))=R$ khi và chỉ khi (P) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(P))<R$ khi và chỉ khi (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

a) Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ



- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;0), B(-1;1;4)$ và $C(3;-2;1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A,B,C và độ dài $OI=\sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính mặt cầu (S) là

A. $R=1$ **B.** $R=3$ **C.** $R=4$ **D.** $R=\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

Vì 4 điểm O,A,B,C thuộc mặt cầu (S) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+d+4=0 \\ -2a+2b+8c+d+18=0 \\ 6a-4b+2c+d+14=0 \end{cases}$$

$$OI=\sqrt{5} \Leftrightarrow OI^2=5 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=5$$

Suy ra $a=-1; b=0; c=-2; d=-4 \Rightarrow R=3$

Chọn B.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(1;0;0), B(2;-1;2), C(-1;1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy, đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$. **B.** $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

C. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4}$. **D.** $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Hướng dẫn giải:

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $x-y-z-1=0$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I\in Oy$ và cắt (ABC) theo một đường tròn bán kính r nhỏ nhất.

Vì $I\in Oy$ nên $I(0;t;0)$, gọi H là hình chiếu của I lên (ABC) khi đó là có bán kính đường tròn giao của (ABC) và (S) là $r=AH=\sqrt{IA^2-IH^2}$.

Ta có $IA^2=t^2+1, IH=d(I,(ABC))=\frac{|t+1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow r=\sqrt{t^2+1-\frac{t^2+2t+1}{3}}=\sqrt{\frac{2t^2-2t+2}{3}}$.

Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=\frac{1}{2}$. Khi đó $I\left(0;\frac{1}{2};0\right), IA^2=\frac{5}{4}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Chọn A.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{243}{9}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{2223}{9}$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{333}{9}$

Hướng dẫn giải:

+ Đường thẳng d đi qua $M(0;-2;0)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Tính được $\overrightarrow{MI}=(1;4;3)$.

+ Khẳng định và tính được $d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{233}}{3}$

+ Khẳng định mặt cầu cần tìm có bán kính bằng $d(I,d)$ và viết phương trình:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$

Chọn A.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-12=0$ và đường thẳng $d: x=5+2t; y=4; z=7+t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết đường thẳng Δ tạo với đường thẳng d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$.

B. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1+11t\end{cases}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$.

D. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-21t\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=26\Rightarrow(S)$ có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{26}$.

$\overrightarrow{IM}=(3;1;4),\overrightarrow{u_1}=(2;0;1)$ là 1 VTVP của (d)

Giả sử $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ là 1 VTCP của đường thẳng $\Delta\left(a^2+b^2+c^2\neq0\right)$

Do tiếp xúc mặt cầu (S) tại $M\Rightarrow\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow3a+b+4c=0\Leftrightarrow b=-3a-4c$ (1)

Mà góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d bằng φ.

$$\Rightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \cos\varphi \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\sqrt{7}\,|2a+c| = \sqrt{5}.\sqrt{a^2+(3a+4c)^2+c^2} \Leftrightarrow 7\left(4a^2+4ac+c^2\right) = 5\left(a^2+9a^2+24ac+16c^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 22a^2+92ac+78c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3c \\ a=-\dfrac{13}{11}c \end{array}\right.$$

Với $a=-3c$ do $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ nên chọn $c=-1 \Rightarrow a=3; b=-5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\begin{cases} x=5+3t \\ y=-5t \\ z=1-t \end{cases}$

Với $a=-\dfrac{13}{11}c$ do $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ nên chọn $c=-11 \Rightarrow a=13; b=5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\begin{cases} x=5+13t \\ y=5t \\ z=1-11t \end{cases}$

Chọn A.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

A. $M(2;0;-2) \vee M\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right)$. **B.** $M(2;0;2) \vee M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right)$.

C. $M(2;0;-2) \vee M\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. **D.** $M(4;0;-2) \vee M\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

Hướng dẫn giải:

Vì $M \in d \Rightarrow M(1+t;-2+2t;-2t)$. Trục Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vtcp $\vec{k}=(0;0;1)$;

$\overrightarrow{OM}=(1+t;-2+2t;-2t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]=(-2+2t;-1-t;0)$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]\right| = \sqrt{5t^2-6t+5}$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có: $R=d(M;Oz)=\sqrt{5t^2-6t+5}$

$$R=2 \Rightarrow \sqrt{5t^2-6t+5}=2 \Rightarrow 5t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(2;-2;0) \\ M\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$$

Chọn A.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình: $\Delta_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{2}; \Delta_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2?

A. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$.
B. $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 6$.
C. $x^2 - (y-2)^2 + z^2 = 6$.
D. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 6$

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2 làm đường kính. Giả sử mặt cầu cần lập là (S) và A, B lần lượt là tiếp điểm của (S) với Δ_1, Δ_2. Viết phương trình Δ_1, Δ_2 dưới dang tham số thì ta có:

$A(2+m;1+4m;1+2m), B(-2+n;3+n;-1-n)$

Do AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2 nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n - 21m = 0 \\ 3n - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 0 \Rightarrow A(2;1;1), B(-2;3;-1)$$

Trung điểm I của AB có tọa độ là $I(0;2;0)$ nên phương trình mặt cầu cần lập là:

$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$

Chọn A.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $(P): y - 2z = 0$. **B.** $(P): x - 2z = 0$. **C.** $(P): y + 2z = 0$. **D.** $(P): x + 2z = 0$

Hướng dẫn giải:

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

(P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3 nên (P) chứa Ox và đi qua tâm I của mặt cầu.

Ta có: $\overrightarrow{OI}(1;-2;-1), (P)$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OI}\right] = (0;-1;-2)$ và (P) qua O.

Vậy $(P): y - 2z = 0$.

Chọn A.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 6 = 0$ tại điểm M. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A, biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ và tâm I có hoành độ âm.

A. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$. **B.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=36$.

C. $(S):(x+1)^2-y^2-(z-1)^2=6$. **D.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Hướng dẫn giải:

Một vec tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(2;1;-1)$. Một vec tơ pháp tuyến của đường thẳng và mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;2;1)$. Gọi δ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\sin\delta=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\delta=\widehat{IMA}=30^0$

Gọi R bán kính mặt cầu $(S)\Rightarrow IA=R$. Tam giác IAM vuông tại A có

$\widehat{IMA}=30^0\Rightarrow AM=R\sqrt{3}.S_{IMA}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{6}$

Giả sử: $I(1+2t;1+t;-t),t<\frac{1}{2}$

Từ giả thuyết ta có khoảng cách: $d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|3t-3|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow t=-1\cup t=3$ (loại)

$\Rightarrow I(-1;0;1)$

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Chọn A.

Câu 9: Trong không gian tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1;-1;2),B(2;1;-1)$ $C(-1;2;-3)$ biết tâm của mặt cầu nằm trên mặt phẳng Oxz.

A. $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$. **B.** $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z+\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1327}{121}$.

C. $(S):\left(x-\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1328}{121}$. **D.** $(S):\left(x-\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1329}{121}$

Hướng dẫn giải:

$I\in(\mathrm{Oxz})$ nên $I(x;0;z),IA=IB=IC$ nên: $\begin{cases}(x-1)^2+1+(z-2)^2=(x-2)^2+1+(z+1)^2\\(x-1)^2+1+(z-2)^2=(x+1)^2+4+(z+3)^2\end{cases}$

Giải hệ ta được $x=-\frac{12}{11};z=-\frac{4}{11}\Rightarrow I\left(-\frac{12}{11};0;-\frac{4}{11}\right)$

Bán kính $R=\sqrt{\frac{1326}{121}}$

Phương trình mặt cầu $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$

Chọn A.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(-13;-1;0),B(2;1;-2),C(1;2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua qua A, song song với BC và tiếp xúc với mặt cầu (S).(S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $R=9$.

A. $(P):-2x+2y-z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-100=0$.

B. $(P):-2x+2y+z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

C. $(P):-2x+2y-z-28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

D. $(P):-2x+2y-2z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-1000=0$

Hướng dẫn giải:

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C),(A^2+B^2+C^2\neq 0),(P)//BC$ nên:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}=(-1;1;4)\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow A=B+4C\Rightarrow \vec{n}=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua $A(13;-1;0)\Rightarrow$ phương trình: $(P):(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d[I,(P)]=R\Leftrightarrow \dfrac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0\Leftrightarrow (B+2C)(B-4C)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B+2C=0\\B-4C=0\end{array}\right.$

Với $B+2C=0$ chọn $\begin{cases}B=2\\C=-1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P):-2x+2y-z+28=0$

Với $B-4C=0$ chọn $\begin{cases}B=4\\C=1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P):8x+4y+z-100=0$

Chọn A.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0,$ mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;1;0),B(2;2;1).$ Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(\alpha):x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-y-2z-11=0$.

B. $(\alpha):x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-y-2z-11=0$.

C. $(\alpha):x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-5y-2z-11=0$.

D. $(\alpha):x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-5y-2z-11=0$

Hướng dẫn giải:

Pt (S) viết dưới dạng $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

Suy ra (S) có tâm $I(2;-1;-1)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;1)$ một VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]=(2;-2;4)\neq\vec{0}$

Gọi vec tơ là một VTPT của mặt phẳng (α). Ta có:

$\begin{cases}(\alpha)//AB\\(\alpha)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]$.

Chọn $\vec{u}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]\Rightarrow\vec{u}=(1;-1;-2)$

Mặt phẳng (α) có một VTPT $\vec{u}$ nên phương trình có dạng $x-y-2z+D=0$

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{3}$. Nên $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

Ta có: $d=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|2-(-1)-2(-1)+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|5+D|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-11\end{array}\right.$

Với $D=1$ thì $(\alpha):x-y-2z+1=0$ không qua $A(-1;1;0)$ (vì $-1-1-2.0+1\neq0$)

Nên $(\alpha)//AB$. Tương tự, mặt phẳng cũng song song với AB.

Vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình:

$(\alpha):x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-y-2z-11=0$.

Chọn A.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;0;0),B(0;2;0)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC là tam giác đều, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC.

A. $(S):x^2+y^2+z^2=2$. **B.** $(S):x^2+y^2+z^2=-2$.

C. $(S):x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$. **D.** $(S):x^2+y^2+z^2=-\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Vì $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;c)$ và tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$AB=AC=BC\Rightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow2^2+2^2=2^2+c\Rightarrow c=\pm2$

Vậy $C(0;0;2)$ hoặc $C(0;0;-2)$

Lập luận được tứ diện $OABC$ đều vì $OA=OB=OC=2$ và tam giác ABC đều.

Gọi I là trung điểm của AB thì $IO\perp AB$ tại

$I\Rightarrow OI=\frac{1}{2}AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$

(Tam giác OAB vuông tại O)

Lập luận được mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác ABC có bán kính $R=d(O,AB)=IO=\sqrt{2}$.

Do đó phương trình có mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=2$.

Chọn A.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$, cắt đường thẳng d và mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}$.

B. $\Delta:\begin{cases}x=-1-6t\\y=-1-2t\\z=-2+9t\end{cases}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=1+2t\\z=2-9t\end{cases}$.

D. $\Delta:\begin{cases}x=-2+6t\\y=-3+2t\\z=-2+9t\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Gọi: $M_1=d\cap\Delta\Rightarrow M_1(2-t;1-2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{MM_1}=(3-t;2-2t;3+t)$

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;1)$

Mặt phẳng $(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\(P)\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MM_1}\end{cases}$

$\Rightarrow(P):(3-t)(x+1)+(2-2t)(y-2)+(3+t)(z-1)=0$

Gọi H là trung điểm AB thì $IH\perp AB, IH=3$

Do $IM=3\sqrt{2}\Rightarrow MH=3=d(M,(P))=\dfrac{|3t-15|}{\sqrt{6t^2-8t+22}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+2t\\z=-2+t\end{cases}$. Với $t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}$.

Chọn A.

Câu 14: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):2x+y+2z+1=0$ tại $M(1;-1;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$

A. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}(c):(x+3)^2+y^2+(z+1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=81\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=81\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Mặt phẳng (Q) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;2)$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (Q)

có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Lấy $I(1+2t; -1+t; -1+2t) \in d$

$MI = d(I,(P)) \Leftrightarrow \sqrt{4t^2 + t^2 + 4t^2} = \left| \dfrac{1+2t-2+2t+2-4t+8}{\sqrt{1+4+4}} \right| \Leftrightarrow t = \pm$

$t = 1 \Rightarrow I(3;0;1), R = 3 \Rightarrow (S): (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$

$t = -1 \Rightarrow I(-1;-2;-3), R = 3 \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$

Chọn A.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$\Delta_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$, $\Delta_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 5 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x - 5y - 3z - 4 = 0$; $x - 5y - 3z + 10 = 0$

B. $x - 5y - 3z + 10 = 0$

C. $x - 5y - 3z + 3 + \sqrt{511} = 0$; $x - 5y - 3z + 3 - \sqrt{511} = 0$

D. $x - 5y - 3z - 4 = 0$

Chọn B.

Hướng dẫn giải:

+ Δ_1 qua $M_1(2;-1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;2;-3)$.

Δ_2 qua $M_2(0;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1;-1;2)$.

+ Mặt phẳng (α) song song với Δ_1, Δ_2 nên có vectơ pháp tuyến: $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1;-5;-3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x - 5y - 3z + D = 0$

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C), ta có: $2\pi r = \dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{365}}{5}$

Khi đó: $d\left(I,(\alpha)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Rightarrow\dfrac{|D-3|}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-4\\D=10\end{array}\right.$

+ Phương trình mặt phẳng $(\alpha):x-5y-3z-4=0$ (1) hay $x-5y-3z+10=0$ (2).

Vì $\Delta_1//(\alpha),\Delta_2//(\alpha)$ nên M_1 và M_2 không thuộc $(\alpha)\Rightarrow$ loại (1).

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là: $x-5y-3z+10=0$.

Chọn B.

Câu 16: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1,0,-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Mặt cầu S có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu S là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

B. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

D. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(x,y,z)$ là tâm của S.

Khi đó $I\in(P),IO=IA,IO+IA+AO=6+\sqrt{2}$ nên ta suy ra hệ

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{2}=6+\sqrt{2}\\x+y-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+z+1=0\\x^2+y^2+z^2=9\\x+y-z-3=0\end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $I(2,2,1)$ hoặc $I(-1,2,-2)$

Chọn D.

Câu 17: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2018$.

B. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

C. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2016$.

D. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2019$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của $I\left(1;7;5\right)$ trên $d \Rightarrow H\left(0;0;-4\right) \Rightarrow IH = d\left(I;d\right) = 2\sqrt{3}$

$S_{\Delta AIB} = \dfrac{IH.AB}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{2S_{\Delta AIB}}{IH} = \sqrt{8020} \Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 2017$

Vậy phương trình mặt cầu là: $\left(x-1\right)^2 + \left(y-7\right)^2 + \left(z-5\right)^2 = 2017.$

Chọn B.

Câu 18: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2 + y^2 + \left(z-3\right)^2 = \dfrac{3}{2}.$ **B.** $x^2 + y^2 + \left(z-3\right)^2 = \dfrac{8}{3}.$

C. $x^2 + y^2 + \left(z-3\right)^2 = \dfrac{2}{3}.$ **D.** $x^2 + y^2 + \left(z-3\right)^2 = \dfrac{4}{3}.$

Hướng dẫn giải:

• Gọi $H\left(-1+t;2t;2+t\right) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(-1+t;2t;-1+t\right)$

• Ta có vectơ chỉ phương của $d: \overrightarrow{a_d} = \left(1;2;1\right)$ và $IH \perp d$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d} = 0 \Leftrightarrow -1+t+4t-1+t = 0 \Leftrightarrow -2+6t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

• Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA = IB = R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I, do đó bán kính:

$R = IA = AB\cos 45^0 = 2IH.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}.\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

• Vậy phương trình mặt cầu $\left(S\right): x^2 + y^2 + \left(z-3\right)^2 = \dfrac{8}{3}.$

Chọn B.

Câu 19: Cho điểm $A\left(2;5;1\right)$ và mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z+24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\left(P\right)$. Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right)$ tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $\left(x-8\right)^2 + \left(y-8\right)^2 + \left(z+1\right)^2 = 196.$ **B.** $\left(x+8\right)^2 + \left(y+8\right)^2 + \left(z-1\right)^2 = 196.$

C. $\left(x+16\right)^2 + \left(y+4\right)^2 + \left(z-7\right)^2 = 196.$ **D.** $\left(x-16\right)^2 + \left(y-4\right)^2 + \left(z+7\right)^2 = 196.$

Hướng dẫn giải:

• Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra $d:\begin{cases} x=2+6t \\ y=5+3t \\ z=1-2t \end{cases}$

• Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H=d\cap(P)$.

Vì $H\in d$ nên $H(2+6t;5+3t;1-2t)$.

• Mặt khác, $H\in(P)$ nên ta có: $6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24=0 \Leftrightarrow t=-1$

Do đó, $H(-4;2;3)$.

• Gọi I,R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π, suy ra $4\pi R^2=784\pi \Rightarrow R=14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH\perp(P)\Rightarrow I\in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t;5+3t;1-2t)$, với $t\neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I,(P))=14 \\ AI<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=14 \\ \sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2}<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \\ -2<t<2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Do đó: $I(8;8;-1)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$.

Chọn A.

Câu 20: Cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z+10=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1, tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P), có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ hoặc $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

B. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ hoặc $\left(x+\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Hướng dẫn giải:

• $\Delta_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(1;1;4)$.

• Giả sử $I(2+t;t;1-t)\in\Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S).

• Ta có: $\overrightarrow{AI}=(t;t;4-t)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{a_2}\right]=(5t-4;4-5t;0)\Rightarrow d(I;\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{a_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|}=\dfrac{|5t-4|}{3}$

$d(I,(P))=\dfrac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|t+10|}{3}$.

• (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P)\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=d(I,(P))\Leftrightarrow|5t-4|=|t+10|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{7}{2}\\t=-1\end{array}\right.$.

• Với $t=\dfrac{7}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$, $R=\dfrac{9}{2}\Rightarrow(S):\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

• Với $t=-1\Rightarrow I(1;-1;2),R=3\Rightarrow(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

Chọn A.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1\\y=1,t\in\mathbb{R};\\z=t\end{cases}$ $d_2:\begin{cases}x=2\\y=u\\z=1+u\end{cases},u\in\mathbb{R};$ $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1,d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

B. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

C. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

D. $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}}=(0;0;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_2}}=(0;1;1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I\in\Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t;t;1+t)$, từ đó

$$\overrightarrow{IM_1}=(-t;1-t;-1-t),\qquad\overrightarrow{IM_2}=(1-t;-t;-t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I;d_1)=d(I;d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_1};\overrightarrow{u_{d_1}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_2};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(1-t)^2+t^2}}{1}=\frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $I(1;0;1)$ và bán kính mặt cầu là $R=d(I;d_1)=1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Câu 22: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\ y=t\\ z=m+t\end{cases}$. Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m=-1$ hoặc $m=-4$ **B.** $m=0$ hoặc $m=-4$

C. $m=-1$ hoặc $m=0$ **D.** Cả A,B,C đều sai

Hướng dẫn giải:

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên *d* phải cắt mặt cầu, tức là phương trình $(2-t)^2+t^2+(m+t)^2-2.(2-t)+4.(m+t)+1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 3t^2+2(m+1)t+m^2+4m+1=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow(m+1)^2-3m^2-12m-3>0$

$\Leftrightarrow m^2+5m+1<0$.

Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lí Viet ta có

$t_1t_2=\dfrac{m^2+4m+1}{3};t_1+t_2=\dfrac{-2}{3}(m+1)$

Khi đó $\overrightarrow{IA}=(1-t_1;t_1;m+2+t_1),\overrightarrow{IB}=(1-t_2;t_2;m+2+t_2)$.

Vậy $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=(1-t_1)(1-t_2)+t_1t_2+(m+2+t_1)(m+2+t_2)=0$

$\Leftrightarrow 3t_1t_2+(m+1)(t_1+t_2)+(m+2)^2+1=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+1-\dfrac{2}{3}(m+1)^2+(m+2)^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-4\end{array}\right.$ (TM).

Chọn A.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m=-24$ **B.** $m=8$ **C.** $m=16$ **D.** $m=-12$

Hướng dẫn giải:

(S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2-m}=\sqrt{13-m}\,(m<13)$

Gọi H là trung điểm M, N $\Rightarrow MH=4$

Đường thẳng (d) qua $A(0;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u}=(2;1;2)\Rightarrow d(I;d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$

Suy ra $R=\sqrt{MH^2+d^2(I;d)}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

Ta có $\sqrt{13-m}=5\Leftrightarrow 13-m=25\Leftrightarrow m=-12$

Chọn D.

Câu 24: Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta): x+2y-2z-4=0$ $(\alpha): 2x-2y-z+1=0$, và mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 8.

A. -9 **B.** -12 **C.** 5 **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(2;1;2)$,

Ta có A(6;4;5) là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A\in d$.

Mặt cầu (S) có tâm I(-2;3;0), bán kính $R=\sqrt{13-m}$ với $m<13$.

$\overrightarrow{IA}=(8;1;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)\Rightarrow d(I,d)=3$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow$ $AH=\frac{AB}{2}=4$ và $IH=3$.

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2=IH^2+AH^2\Leftrightarrow R^2=9+16$

$\Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$. Vậy $m = -12$ là giá trị cần tìm.

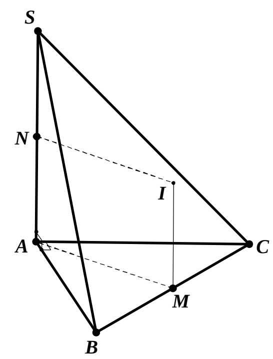
Chọn B.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho $A(1;0;2), B(3;1;4), C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm *S*, biết *SA* vuông góc với *(ABC)*, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *S.ABC* có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$ và *S* có cao độ âm.

A. $S(-4;-6;4)$. **B.** $S(3;4;0)$. **C.** $S(2;2;1)$. **D.** $S(4;6;-4)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1;2); \overrightarrow{AC} = (2;-2;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.



Tam giác ABC vuông nên I và S có thể sử dụng các tính chất của phép dựng tâm để tính.

Tính được IM.

$MI \perp (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = k\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \rightarrow k$

$\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{MI}$, *tìm S.*

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3;6;-6)$

Gọi $M\left(3;\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm BC. Ta có:

$$IM^2 = IB^2 - BM^2 = \left(\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = \frac{81}{4} \Rightarrow IM = \frac{9}{2}$$

$MI \perp (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = k\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = k(3;6;-6) \Rightarrow MI = 9|k|$. Suy ra $\dfrac{9}{2} = 9|k| \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{2}$

$k = \dfrac{1}{2}$ thì $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{MI} = (3;6;-6) \Rightarrow S(4;6;-4)$

Chọn D.

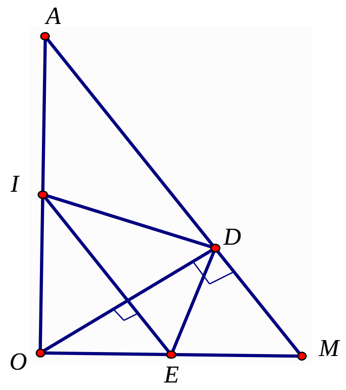
Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R = 2$. **B.** $R = 1$. **C.** $R = 4$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O.
Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)
Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID = \frac{1}{2}OA = 2$ (1)
Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$
Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra IE là đường trung trực của OD
Nên



$\widehat{DOE} = \widehat{ODE}; \widehat{IOD} = \widehat{IDO} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IOE} = 90° \Rightarrow ID \perp DE$ (2)

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R = 1$. **B.** $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R = \frac{3}{2}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

Mặt khác $d(I,(ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1 = d(I,(ABC))$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D

Chọn A.

Câu 28: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$.Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ **B.** $D\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$ **C.** $D\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có (S): $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ suy ra (S) có tâm I(1;0;-1), bán kính $R=2$

Và $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-4);\overrightarrow{AC}=(-1;-3;-4)$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)$

Suy ra mp(ABC) có phương trình: $-8x+8(y-1)-4(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-2y+z+1=0$

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d(D;(ABC)).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(D;(ABC))$ lớn nhất. Gọi D_1D_2 là ***đường kính*** của mặt cầu (S) *vuông góc* với mp(ABC). Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì $d(D;(ABC))\le\max\left\{d(D_1;(ABC));\ d(D_2;(ABC))\right\}$.

Dấu "=" xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2

Đường thẳng D_1D_2 đi qua I(1;0;-1), và có VTCP là $\vec{n}_{ABC}=(2;-2;1)$

Do đó (D_1D_2) có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm D_1 và D_2 thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\\(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\\t=\frac{-2}{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};\frac{-4}{3};\frac{-1}{3}\right)\ \&\ D_2\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d(D_1;(ABC))>d(D_2;(ABC))$. Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm

Chọn D.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A,B. Tính diện tích tam giác IAB.

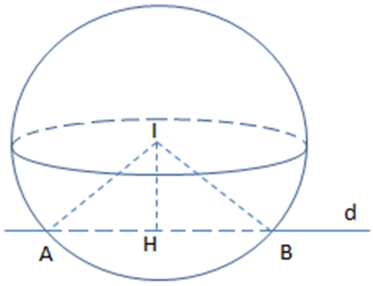
A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{6}$. **D.** $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d.

Khi đó: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$, với $\overrightarrow{IC}=(0;-2;-2)$;

$2x+y-3z-4=0$

Vậy $IH=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{66}}{3}$

Suy ra $HB=\sqrt{18-\dfrac{22}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Vậy, $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{66}}{3}\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$.

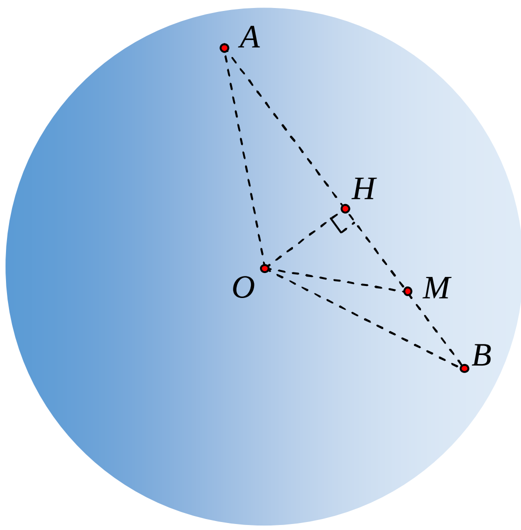
Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Vì $OM=1<R$ nên M thuộc miền trong của mặt cầu (S). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với mặt cầu. Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB.



Đặt $x=OH$, ta có $0<x\le OM=1$, đồng thời $HA=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{8-x^2}$. Vậy diện tích tam giác OAB là

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=OH.HA=x\sqrt{8-x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$, ta được $\max\limits_{(0;1]} f(x)=f(1)=\sqrt{7}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB}=\sqrt{7}$, đạt được khi $x=1$ hay $H\equiv M$, nói cách khác là $d\perp OM$.

Chọn A.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(a;b;c), r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r=d(I,(P))=\frac{\left|2ma+(m^2+1)b+(m^2-1)c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}=\frac{\left|(b-c)m^2+2ma+b-c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$$

$$\left|(b+c)m^2+2ma+b-c-10\right|=r(m^2+1)\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 & (1)\\ \left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0 & (2)\end{array}\right.$$

TH1: $\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 \quad (1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện a,b,c sao cho (1) không phụ thuộc vào m. Do đó (1) luôn đúng với mọi

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b+c-r\sqrt{2}=0\\ a=0\\ b-c-r\sqrt{2}-10=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=r\sqrt{2}+5=0\\ a=0\\ c=-5\end{cases}$$ Suy ra $I\left(0;5+r\sqrt{2};-5\right) \Rightarrow (S): x^2+\left(y-5-r\sqrt{2}\right)^2+(z+5)^2=r^2$.

Lại có $A\in(S)$ nên suy ra: $4+\left(-11-5-r\sqrt{2}\right)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}r=2\sqrt{2}\\ r=10\sqrt{2}\end{array}\right.$

TH2: $\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại: Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là: $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

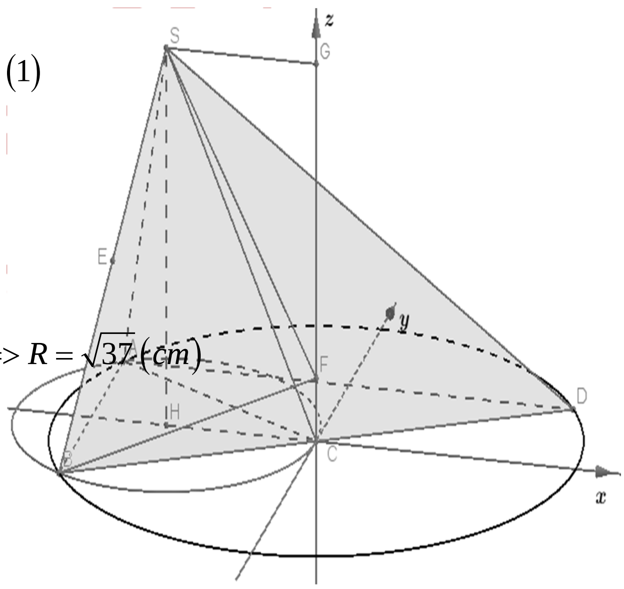
Câu 32: Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA=SB=SC=4\sqrt{3}(cm)$ .Gọi D là điểm đối xứng của B qua **C.** Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABD bằng?

A. $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Dựng CG vuông góc với (ABC), Qua E dựng mặt phẳng vuông góc với SB, mặt phẳng này cắt CG tại F. Suy ra F là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.AB**D.**Đặt $SF=R$

Xét hình chữ nhật:



$FGSH \Rightarrow FC=SH-FG=SH-\sqrt{R^2-CH^2}$ (1)

Lại có: $FC=\sqrt{R^2-CB^2}$ (2).Từ (1) và (2)

suy ra $SH-\sqrt{R^2-CH^2}=\sqrt{R^2-CB^2}$

$6-\sqrt{R^2-12}=\sqrt{R^2-36}\Rightarrow 5-\sqrt{R^2-12}=0 \Rightarrow R=\sqrt{37}(cm)$

Suy ra chọn D

Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có: $C(0;0;0), A\left(-3\sqrt{3};-3;0\right), B\left(-3\sqrt{3};3;0\right), S\left(-2\sqrt{3};0;6\right)$

$F\in CG \Rightarrow F(0;0;t)\Rightarrow FA=FS \Leftrightarrow \sqrt{36+t^2}=\sqrt{12+(t-6)^2}$

$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow SC=\sqrt{37}(cm)$ suy ra chọn D

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M,N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1), R=\sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm vecto chỉ phương

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d. $H \in d \Leftrightarrow H(2t+2;-t;4t)$

Lại có:

$\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (2t+1;-t-2;4t-1).(2;-1;4)=0 \Leftrightarrow 2(2t+1)+t+2+4(4t-1)=0 \Leftrightarrow t=0$

Suy ra tọa độ điểm $H(2;0;0)$.

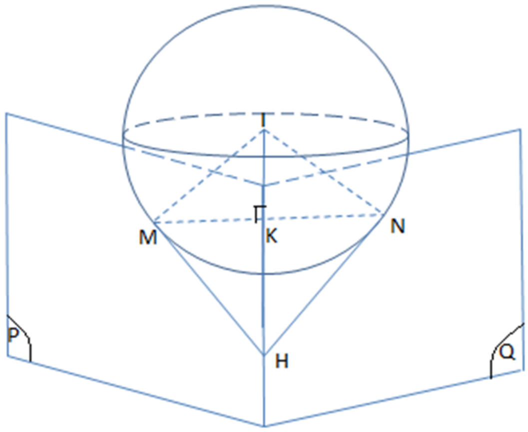
Vậy $IH=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

Suy ra: $HM=\sqrt{6-2}=2$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI.

Suy ra: $\dfrac{1}{MK^2}=\dfrac{1}{MH^2}+\dfrac{1}{MI^2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$.

Suy ra: $MK=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.



Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: Ta có $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc **với** $(S) \Leftrightarrow d(I;(ABC))=R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

Mà $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{7}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{a}}=\dfrac{2}{\frac{1}{b}}=\dfrac{3}{\frac{1}{c}} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7 \end{cases} \Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\frac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Cách 2: Ta có $(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3), R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Ta có (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}.$$

Cách 3: Giống **Cách 2** khi đến $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có

$$7^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\left(1.\frac{1}{a}+2.\frac{1}{b}+3.\frac{1}{c}\right)^2 \leq \left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{7}{2}$$

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{\frac{1}{a}}{1}=\frac{\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$ ta được $a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$. Vậy: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Ta có $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{7}}{a}+\frac{\frac{2}{7}}{b}+\frac{\frac{3}{7}}{c}=1$ nên $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)\in(ABC)$

Thay tọa độ $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta thấy đúng nên $M\in(S)$.

Suy ra: (ABC) tiếp xúc với (S) thì M là tiếp điểm.

Do đó: (ABC) qua $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$, có VTPT là $\overrightarrow{MI}=\left(\frac{6}{7};\frac{12}{7};\frac{18}{7}\right)\rightarrow\vec{n}=(1;2;3)$

(ABC) có phương trình: $x+2y+3z-2=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$

GTLN, GTNN TRONG HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXYZ

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

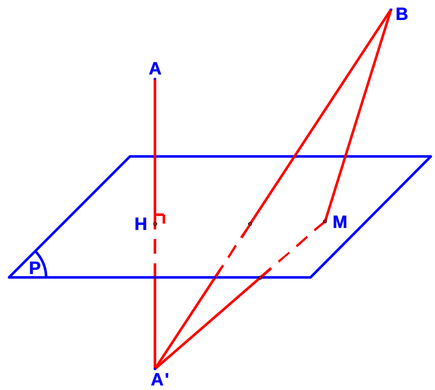
A. $M(2;2;9)$.
B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$.
D. $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Thay tọa độ $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P), ta được $P(A)P(B)>0 \Rightarrow$ hai điểm A, B cùng phía với đối với mặt phẳng (P).



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Ta có

$$MA+MB=MA'+MB\ge A'B.$$

Nên $\min(MA+MB)=A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Phương trình $AA':\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ (AA' đi qua $A(1;0;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$).

Gọi H là giao điểm của AA' trên (P), suy ra tọa độ của H là $H(0;-2;4)$, suy ra $A'(-1;-4;6)$, nên phương trình $A'B:\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2-4t\end{cases}$.

Vì M là giao điểm của $A'B$ với (P) nên ta tính được tọa độ $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 2: Cho hai điểm $A(-1,3,-2); B(-9,4,9)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$. Điểm M thuộc (P). Tính GTNN của $AM+BM$.

A. $\sqrt{6}+\sqrt{204}$
B. $\frac{\sqrt{7274}+\sqrt{31434}}{6}$
C. $\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{726}}{3}$
D. $3\sqrt{26}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(2.(-1)-3+(-2)+1)(2.(-9)-4+9+1)=72>0$ => A,B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2,-1,1)$

Đường thẳng AA' đi qua $A(-1,3,-2)$ có vtcp $\vec{n}(2,-1,1)$ có pt: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-t \\ z=-2+t \end{cases}$

Gọi H là giao của AA' và (P) ta có:

$2(-1+2t)-(3-t)+(-2+t)+1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(1,2,-1)$. Ta có H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(3,1,0)$.

Đường A'B đi qua A'(3, 1, 0) có vtcp $\overrightarrow{A'B}(-12,3,9)$ có pt: $\begin{cases} x=3-4t \\ y=1+t \\ z=3t \end{cases}$

Gọi N là giao điểm của A'B và mặt phẳng (P) ta có:

$2.(3-4t)-(1+t)+3t+1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow N(-1,2,3)$.

Để $MA+MB$ nhỏ nhất thì $M \equiv N$ khi đó $MA+MB=A'B$ =

$\sqrt{(-12)^2+3^2+9^2}=\sqrt{234}=3\sqrt{26}$

Chọn D.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. M là một điểm trên mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của $T=|MA-MB|$ là:

A. $T=2\sqrt{5}$. **B.** $T=2\sqrt{6}$. **C.** $T=\frac{4\sqrt{6}}{2}$. **D.** $T=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: A, B nằm khác phía so với (P). Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (P). Suy ra $B'(-1;-3;4)$.

$T=|MA-MB|=|MA-MB'|\le AB'=2\sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi M, A, B' thẳng hàng.

Chọn A.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+z+1=0$ và hai điểm $M(3;1;0), N(-9;4;9)$. Tìm điểm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM-IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết a,b,c thỏa mãn điều kiện:

A. $a+b+c=21$ **B.** $a+b+c=14$ **C.** $a+b+c=5$ **D.** $a+b+c=19$.

Hướng dẫn giải:

Nhận thấy 2 điểm M, N nằm về hai phía của mặt phẳng (P).

Gọi R là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P), khi đó đường thẳng MR đi qua điểm M(3; 1; 0) và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi $H=MR\cap(\text{P})\Rightarrow H(1;2;-1)\Rightarrow R(-1;3;-2)$.

Ta có $|IM-IN|=|IR-IN|\le RN$. Đẳng thức xảy ra khi I, N, R thẳng hàng. Do đó tọa độ điểm I là giao điểm của đường thẳng NR: $\begin{cases}x=-1-8t\\y=3+t\\z=-2+11t\end{cases}$ (t là tham số) và mặt phẳng (P).

Dễ dàng tìm được I(7; 2; 13).

Chọn A.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;2), B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+6=0$. Tọa độ điểm M nằm trên (P) saocho MA^2+MB^2 nhỏ nhất là:

A. $(-1;3;2)$ **B.** $(2;1;-11)$ **C.** $(-1;1;5)$ **D.** $(1;-1;7)$

Hướng dẫn giải:

+ Kiểm tra phương án A không thuộc (P).

+ Tính trực tiếp MA^2 + MB^2 trong 3 phương án B,C,D và so sánh.

Chọn C.

Câu 6: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0, A(8;-7;4), B(-1;2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;0;-1)$. **B.** $M(0;0;1)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(0;1;0)$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0\Rightarrow I(2;-1;0)$

Có $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$

Vì IA, IB không đổi nên $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t; d\cap(P)=M(0;0;-1)\\z=t\end{cases}$$

Chọn A.

Câu 7: Cho 2 điểm $A(0,0,-3), B(2,0,-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x-8y+7z-1=0$. Tìm $M \in (P)$ sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$.   **B.** $M\left(\frac{-283}{183};\frac{104}{183};\frac{-214}{183}\right)$.

C. $M\left(\frac{283}{183};\frac{-14}{183};\frac{-14}{183}\right)$.   **D.** $M\left(\frac{283}{183};\frac{14}{183};\frac{14}{183}\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0 \Rightarrow I\left(\frac{4}{3};0;\frac{5}{3}\right)$

$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=3MI^2+IA^2+2IB^2$

Suy ra $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}$ khi MI bé nhất hay M là hình chiếu của I trên (P).

Tìm được tọa độ $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$.

Chọn A.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ hai điểm $A(2;0;3)$ và $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc Δ thì MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0

A. $x_0=0$ **B.** $x_0=1$ **C.** $x_0=2$ **D.** $x_0=3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=2 \\ y=t_1 \\ z=3+3t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R})$. Dễ thấy đường thẳng Δ và AB cắt nhau tại điểm $I(2;-1;0)$ suy ra AB và Δ đồng phẳng.

Lại có $\overrightarrow{IA}(0;1;3), \overrightarrow{IB}(0;-1;-3) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB} \Rightarrow IA+IB=AB$.

Ta có: $MA^4+MB^4 \geq \frac{1}{2}\left(MA^2+MB^2\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(MA+MB)^2\right)^2 \geq \frac{1}{8}AB^4=\frac{1}{8}(IA+IB)^4$.

Do đó MA^4+MB^4 nhỏ nhất khi M trùng với điểm $I(2;-1;0)$

Chọn C.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3);B(0;1;1);C(1;0;-2)$. Điểm $M\in(P):x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q):2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng

A. $\frac{121}{54}$. **B.** 24. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{101}{54}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $T=6x^2+6y^2+6z^2-8x-8y+6z+31$

$\Rightarrow T=6\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{145}{6}$

$\Rightarrow T=6MI^2+\frac{145}{6}$ với $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ $(P):x-y+z+1=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $N(3;5;1)$. **C.** $N(-2;0;1)$. **D.** $N\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-2\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi I là trung điểm BC và J là trung điểm AI. Do đó $I\left(-1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $J\left(0;\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Khi đó $S=2NA^2+2NI^2+\frac{1}{2}BC^2=4NJ^2+IJ^2+\frac{1}{2}BC^2$.

Do đó S nhỏ nhất khi NJ nhỏ nhất. Suy ra J là hình chiếu của N trên (P).

Phương trình đường thẳng $NJ:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{3}{4}-t\\ z=\frac{5}{4}+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x=t \\ y=\dfrac{3}{4}-t \\ z=\dfrac{5}{4}+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{4} \\ z=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Câu 11: rong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;01;1), B(1;2;1), C(4;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó M có tọa độ

A. $M(1;1;-1)$ **B.** $M(1;1;1)$ **C.** $M(1;2;-1)$ **D.** $M(1;0;-1)$

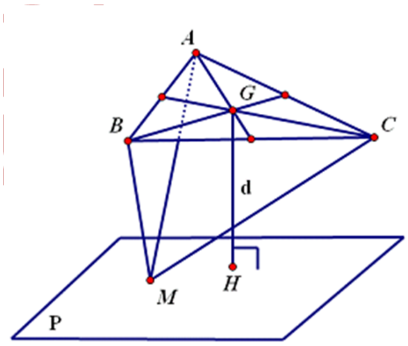
Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G(2;1;0)$, ta có

$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ (1)

Từ hệ thức (1) ta suy ra:

$MA^2+MB^2+MC^2$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MG$ đạt GTNN $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên (P).



Gọi (d) là đường thẳng qua G và vuông góc với (P) thì (d) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1;0;-1)$

Chọn D.

Câu 12: (Hình Oxyz) Cho $A(-1;3;5), B(2;6;-1), C(-4;-12;5)$ và điểm $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm hoành độ điểm M.

A. $x_M=3$ **B.** $x_M=-1$ **C.** $x_M=1$ **D.** $x_M=-3$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là điểm $\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(3;7;-3)$. Gọi G là trọng tâm ta m giác ABC $\Rightarrow G(-1;-1;3)$

Nhận thấy, M,I nằm khác phía so với mp(P).

Có $S=3\left(MI+MG\right)\geq 3GI$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của GI và (P) $\Rightarrow M\left(1;3;1\right)$

Chọn C.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(2;1;-1\right)$, $B\left(0;3;1\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-4;-1;0\right)$. **B.** $M\left(-1;-4;0\right)$. **C.** $M\left(4;1;0\right)$. **D.** $M\left(1;-4;0\right)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $I\left(a;b;c\right)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, suy ra $I\left(4;-1;-3\right)$.

Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{MI}$. Suy ra $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng $\left(P\right)$Đường thẳng đi qua I và vuông góc với $\left(P\right)$ có là $d:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Tọa độ hình chiếu M của I trên $\left(P\right)$ thỏa mãn

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-1}\\ x+y-z+3=0\end{cases}\Rightarrow M\left(1;-4;0\right).$$

Chọn D.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

C. $M\left(-\dfrac{29}{3};\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): $d(I;(P))=6<R$ nên (P) cắt (S).

Khoảng cách từ M thuộc (S) đến (P) lớn nhất $\Rightarrow$ $M \in (d)$ đi qua I và vuông góc với (P)

Phương trình $(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Ta có: $M \in (d) \Rightarrow M(3+2t; -2-2t; 1-t)$

Mà: $M \in (S) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{10}{3} \Rightarrow M_1\left(\dfrac{29}{3}; -\dfrac{26}{3}; -\dfrac{7}{3}\right) \\ t = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow M_2\left(-\dfrac{11}{3}; \dfrac{14}{3}; \dfrac{13}{3}\right) \end{array} \right.$

Thử lại ta thấy: $d(M_1,(P)) > d(M_2,(P))$ nên $M\left(-\dfrac{11}{3}; \dfrac{14}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$. Giá trị của điểm M trên (S) sao cho $d(M,(P))$ đạt GTNN là:

A. $(1;1;3)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Hướng dẫn giải::

Ta có: $d(M,(P)) = 3 > R = 2 \Rightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$.

Đường thẳng *d* đi qua *I* và vuông góc với *(P)* có pt: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của *d* và *(S)* là: $A\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

Ta có: $d(A,(P)) = 5 \geq d(B,(P)) = 1.$ $\Rightarrow d(A,(P)) \geq d(M,(P)) \geq d(B,(P)).$

Vậy: $\Rightarrow d(M,(P))_{\min} = 1 \Leftrightarrow M \equiv B.$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

A. $a + b + c = 5$. **B.** $a + b + c = 6$. **C.** $a + b + c = 7$. **D.** $a + b + c = 8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;2;3)$ và vuông góc (P)

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$.

Gọi A,B lần lượt là giao của d và (S), khi đó tọa độ A,B ứng với t là nghiệm của phương trình $(1+2t-1)^2+(2-2t-2)^2+(3+t-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow A(3;0;4) \Rightarrow d(A;(P))=\dfrac{13}{3}$.

Với $t=-1 \Rightarrow B(-1;4;2) \Rightarrow d(B;(P))=\dfrac{5}{3}$.

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \le d(M;(P)) \le d(A;(P))$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\dfrac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho 4 điểm $A(2;3;2)$, $B(6;-1;-2)$, $C(-1;-4;3)$, $D(1;6;-5)$. Gọi M là một điểm nằm trên đường thẳng CD sao cho tam giác MAB có chu vi bé nhất. Khi đó toạ độ điểm M là:

A. $M(0;1;-1)$ **B.** $M(2;11;-9)$ **C.** $M(3;16;-13)$ **D.** $M(-1;-4;3)$

Hướng dẫn giải:

Tam giác MAB có độ dài cạnh $AB=4\sqrt{3}$ không đổi, do đó chu vi bé nhất khi và chỉ khi $MA+MB$ bé nhất.

$\overrightarrow{AB}=(4;-4;-4)$; $\overrightarrow{CD}=(2;10;-8)$. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ nên $AB\perp CD$, suy ra điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của A, cũng là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CD. Từ đó tìm ra điểm $M(0;1;-1)$.

Chọn A.

Câu 18: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA=a, OB=b, OC=c$ đôi một vuông góc với nhau. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng các lần lượt đến các mặt phẳng

$(OBC),(OCA),(OAB)$ là 1,2,3. Khi tồn tại a,b,c thỏa thể tích khối chóp $O.ABC$ nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $O.ABC$ là

A. 18 **B.** 27

C. 6 **D.** Không tồn tại a,b,c thỏa yêu cầu bài toán

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ thỏa $O(0,0,0),A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$

Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng các lần lượt đến các mặt phẳng $(OBC),(OCA),\ (OAB)$ là 1,2,3 nên tọa độ điểm M là (1,2,3)

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Vì M thuộc mặt phẳng (ABC) nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$

$V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}\Leftrightarrow \frac{1}{6}abc\ge 27$

Chọn B.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C khác O. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì: $M\in(P)\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{2}{b}.\frac{1}{c}}$

Hay $1\ge 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}}\Leftrightarrow 1\ge\frac{54}{abc}$. Suy ra: $abc\ge 54\Leftrightarrow \frac{1}{6}abc\ge 9$

Vậy: $V_{OABC} \geq 9$.

Câu 20: Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho 3 điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.Giả sử a,b,c thay đổi nhưng thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=k^2$ không đổi. Diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{k^2\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{k^2\sqrt{3}}{6}$ **C.** $k^2\sqrt{3}$ **D.** k^2

Hướng dẫn giải:

Phương trình (ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC)

Khi đó $\begin{cases} H \in (ABC) \\ OH \perp AB \\ OH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bcx+cay+abz=abc \\ -ax+by=0 \\ -ax+cz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ab^2c^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2} \\ y=\dfrac{a^2bc^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2} \\ z=\dfrac{a^2b^2c}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2} \end{cases}$

$\Rightarrow OH=\frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}$

Ta có $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}abc$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{3V_{ABCD}}{OH}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leq \frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}=a^4+b^4+c^4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\max S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^4}{3}}=\frac{k^2\sqrt{3}}{6}$

Chọn B.

Câu 21: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **B.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **C.** $\frac{x}{-27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **D.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=-1$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz\ \ (a,b,c>0)$.

Khi đó PT mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(9;1;1)\in(P)\Rightarrow\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ (1); $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$ (2)

(1) $\Leftrightarrow abc=9bc+ac+ab\ \geq 3\sqrt[3]{9(abc)^2}\ \Leftrightarrow (abc)^3\geq 27.9(abc)^2\Leftrightarrow abc\geq 243$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}9bc=ac=ab\\ \frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=27\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Rightarrow$ (P): $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$.

Chọn B.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b)$ với $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giả sử $a+b=4$, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $A'BDM$?

A. $\max V_{A'MBD}=\frac{64}{27}$ **B.** $\max V_{A'MBD}=1$

C. $\max V_{A'MBD}=-\frac{64}{27}$ **D.** $\max V_{A'MBD}=\frac{27}{64}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C(a;a;0), B'(a;0;b), D'(0;a;b), C'(a;a;b)\Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b), \overrightarrow{A'D}=(0;a;-b), \overrightarrow{AM}=\left(a;a;-\frac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(ab;ab;a^2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{A'M}=\frac{3a^2b}{2}\Rightarrow V_{A'MBD}=\frac{a^2b}{4}$

Do $a,b>0$ nên áp dụng BĐT Côsi ta được: $4=a+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}\Rightarrow a^2b\leq\frac{64}{27}$

Suy ra: $\max V_{A'MBD}=\frac{64}{27}$.

Chọn A.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa đô điểm M và chu vi tam giác ABC là

A. $M(1;0;2)$; $P = 2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$ **B.** $M(1;2;2)$; $P = 2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

C. $M(1;0;2)$; $P = \sqrt{11}+\sqrt{29}$ **D.** $M(1;2;2)$; $P = \sqrt{11}+\sqrt{29}$

Hướng dẫn giải:

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM$.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$. $AM + BM = \sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = (3t;2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t+6;2\sqrt{5})$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $\vec{u}+\vec{v} = (6;4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{3t}{-3t+6} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ *và* $\min(AM+BM) = 2\sqrt{29}$. *Vậy khi M(1;0;2) thì minP =* $2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

Chọn A.