Chuyên đề

BẤT ĐẲNG THỨC & CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Huỳnh Chí Hào
THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

1.1 Số thực dương, số thực âm

- Nếu a là số thực dương, ta ký hiệu $a > 0$
- Nếu a là số thực âm, ta ký hiệu $a < 0$
- Nếu a là số thực dương hoặc $a = 0$, ta nói a là số thực không âm, ký hiệu $a \geq 0$
- Nếu a là số thực âm hoặc $a = 0$, ta nói a là số thực không dương, ký hiệu $a \leq 0$

Chú ý:

- Với hai số thực a, b chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:

  $a > b$ hoặc $a < b$ hoặc $a = b$
- Phủ định của mệnh đề "a > 0" là mệnh đề "$a \leq 0$"
- Phủ định của mệnh đề "a < 0" là mệnh đề "$a \geq 0$"

Tính chất quan trọng

i) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (đẳng thức xảy ra khi $x = 0$)

ii) $x^{2k} \geq 0,\ k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$ (đẳng thức xảy ra khi $x = 0$)

iii) $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \ldots + x_n^{2k} \geq 0,\ k \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{R}$ (đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$)

1.2 Định nghĩa 1

Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu a > b nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$.
Khi đó ta cũng ký hiệu b < a

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

- Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $a \geq b$. Ta có:

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$$

1.3 Định nghĩa 2

Giả sử A, B là hai biểu thức (bằng số hoặc chứa biến)

Mệnh đề : " A lớn hơn B ", ký hiệu $A > B$
" A nhỏ hơn B ", ký hiệu $A < B$
" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \geq B$
" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \leq B$

được gọi là một bất đẳng thức

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- **Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng**

1.4 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1.4.1 Tính chất 1. $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ (*Bắc cầu*)

1.4.2 Tính chất 2. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (*Cộng hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 1. $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$ (*Trừ hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 2. $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$ (*Chuyển vế*)

1.4.3 Tính chất 3. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$ (*Cộng hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.4 Tính chất 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$ (*Nhân hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 3. $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ (*Đổi dấu hai vế*)

Hệ quả 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$ (*Chia hai vế với cùng một số*)

1.4.5 Tính chất 5. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ (*Nhân hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.6 Tính chất 6. $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ (*Nghịch đảo hai vế*)

1.4.7 Tính chất 7. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$ (*Nâng lũy thừa bậc n*)

1.4.8 Tính chất 8. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (*Khai căn bậc n*)

Hệ quả 5. Nếu a và b là hai số dương thì :

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ (*Bình phương hai vế*)

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ (*Bình phương hai vế*)

2. Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối

2.1 Định nghĩa. $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ $(x \in R)$

2.2 Tính chất. $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

Với mọi $a, b \in R$ ta có :

- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

3. Bất đẳng thức trong tam giác

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- a > 0, b > 0, c > 0
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

4. Bất đẳng thức vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta có:

- $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- $\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

5. Các bất đẳng thức cơ bản

5.1. Bất đẳng thức Cauchy (Cô-si) hay AM - GM

- Với hai số a, b không âm $(a, b \ge 0)$ ta luôn có:

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad \textbf{hay} \quad a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad \textbf{hay} \quad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

- Với ba số a, b, c không âm $(a, b, c \ge 0)$ ta luôn có:

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \quad \textbf{hay} \quad a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \quad \textbf{hay} \quad abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Tổng quát

Cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có :

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \quad \textbf{hay} \quad a_1+a_2+...+a_n \ge n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

5.2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

- **Đối với hai cặp số thực**

Cho hai cặp số thực $\begin{cases}(a,b)\\(x,y)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ax = by$

- **Đối với hai bộ ba số thực**

Cho hai bộ ba số thực $\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)\\(b_1,b_2,b_3)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Tổng quát

Cho hai bộ n số thực $\begin{cases}(a_1, a_2, ..., a_n)\\(b_1, b_2, ..., b_n)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2})(b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2})}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức

Cho hai bộ n số thực $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ với $b_1, b_2, ..., b_n > 0$ ta có :

$$\boxed{\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

Dạng thường sử dụng:

- Với $x, y > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$ ta có: $\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}}$
- Với $x, y, z > 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có: $\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z}}$

5.3 Một số bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng khác

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
1	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$	$a=b$
2	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
3	$a,b\in\mathbb{R}$	$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$	$a=b$
4	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	$a=b$
5	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$	$a=b=c$
7	$a,b\in\mathbb{R}$ và $ab\ge 1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$	$a=b$ hoặc $ab=1$
8	$a,b>0$	$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$	$a=b$
9	$a,b,c>0$	$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$	$a=b=c$
10	$a,b>0$	$(a+b)^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\ge 8$ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}$	$a=b$
11	$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$	$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\ge\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ **(Bđt Minkowski)**	

Chú ý: Các bất đẳng thức từ 7 đến 11 khi sử dụng phải chứng minh.

6. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Định nghĩa : Giả sử hàm số $y = f(x)$ (biểu thức một biến) xác định trên tập hợp D.

- Số M được gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x) \le M \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}}$$

Ký hiệu: $M = \underset{x \in D}{\text{Max}}\, f(x)$ (x$_0$ còn được gọi là điểm rơi)

- Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x) \ge m \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}}$$

Ký hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ (x$_0$ còn được gọi là điểm rơi)

- Đối với GTLN và GTNN đối với biểu thức nhiều biến $f(x;y)$ hay $f(x;y;z)$ cũng có định nghĩa tương tự.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta thường sử dụng các phương pháp sau

1. Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết rằng đúng .

Cụ thể khi thực hành

Để chứng minh bất đẳng thức $A_1 \ge B_1$ bằng phương pháp biến đổi tương đương ta thường thực hiện theo sơ đồ như sau:

$$\boxed{A_1 \ge B_1 \Leftrightarrow A_2 \ge B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n \ge B_n}$$

Trong đó bất đẳng thức $A_n \ge B_n$ là bất đẳng thức đúng đã biết.

Vậy bất đẳng thức $A_1 \ge B_1$ được chứng minh.

Chú ý

i) Chỉ sử dụng các tính chất cho ta các phép biến đổi tương đương giữa các bất đẳng thức.

ii) Khi thay một biểu thức trong bất đẳng thức bởi một biểu thức khác bằng với nó ta cũng được một bất đẳng thức tương đương.

Ví dụ 1. Chứng minh các bất đẳng thức trong bảng sau

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
1	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$	$a=b$
2	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
3	$a,b\in\mathbb{R}$	$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$	$a=b$
4	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	$a=b$
5	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$	$a=b=c$
7	$a,b\in\mathbb{R}$ và $ab\ge 1$	$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$	$a=b$ hoặc $ab=1$

Hướng dẫn giải

a) Các bất đẳng thức từ 1 đến 3 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2\ge 0$

b) Các bất đẳng thức từ 4 đến 6 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

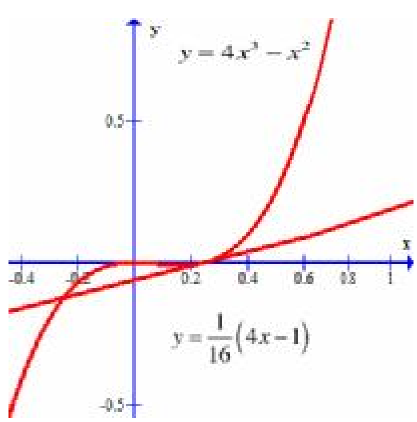
c) Bất đẳng thức 7 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2(ab-1)\ge 0$

Ví dụ 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1) $4x^3-x^2\ge\frac{1}{16}(4x-1)$, $\forall x\in(0;1)$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

2) $\frac{x}{5+3x^2}\le\frac{1}{32}(x+3)$, $\forall x\in[0;4]$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Minh họa hình học



2. Phương pháp 2: Phương pháp tổng hợp (hay phương pháp biến đổi hệ quả)

Xuất phát từ các bất đẳng thức đúng đã biết dùng suy luận toán học để suy ra điều phải chứng minh.

Cụ thể khi thực hành

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ bằng phương pháp biến đổi tương đương ta thường thực hiện theo sơ đồ như sau:

$$\boxed{X \geq Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow A \geq B}$$

Trong đó bất đẳng thức $X \geq Y$ là bất đẳng thức đúng đã biết.
Vậy bất đẳng thức $A \geq B$ được chứng minh.

***Chú ý 1*:** Trong thực tế giải toán ta thường phải phối hợp nhiều mệnh đề đúng (có thể là đẳng thức, bất đẳng thức) để suy ra điều phải chứng minh theo sơ đồ sau:

SƠ ĐỒ 1: Tạo ra một dãy các bất đẳng thức trung gian

$$\boxed{A \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_n \geq B}$$

SƠ ĐỒ 2: Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} X_1 \geq Y_1 \\ X_2 \geq Y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n \geq Y_n \end{array}\right\} \Rightarrow A \geq B}$$

Chú ý 2:

i) Đây là phương pháp thường được sử dụng.
ii) Khi sử dụng cần phối hợp các tính chất của bất đẳng thức.
iii) Có thể sử dụng nhiều bất đẳng thức đúng để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Đối với các bất đẳng thức đúng mà ta sử dụng nếu không có trong chương trình SGK thì nên chứng minh lại.

Ví dụ 2. Chứng minh các bất đẳng thức trong bảng sau

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
8	$a,b>0$	$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$	$a=b$
9	$a,b,c>0$	$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ **hay** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{a+b+c}$	$a=b=c$
10	$a,b>0$	$(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 8$ **hay** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq \frac{8}{(a+b)^2}$	$a=b$
11	$a_1,a_2,b_1,b_2\in \mathbb{R}$	$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ **(Bđt Minkowski)**	

Hướng dẫn giải

a) Các bất đẳng thức từ 8 đến 10 được chứng minh bằng Cauchy, kết hợp với tính chất bất đẳng thức.
b) Bất đẳng thức 11 chứng minh bằng bất đẳng thức vectơ, kết hợp với tọa độ.

III. CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho ba số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\le 6$.

Lời giải.

Do $a\in\left[-1;2\right]$ (Đ) $\Rightarrow -1\le a\le 2$ $\Rightarrow (a+1)(a-2)\le 0$ $\Rightarrow a^2-a-2\le 0$ (Đ) (1)

Lập luận tương tự, ta có: $b^2-b-2\le 0$ (2) (Đ)

$c^2-c-2\le 0$ (3) (Đ)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có: $a^2+b^2+c^2-(a+b+c)-6\le 0$ (Đ)

Vì $a+b+c=0$ (Đ), nên từ (4) suy ra: $a^2+b^2+c^2\le 6$ (đpcm).

Bài 2. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$, đặt $t=x+y+z$

Chứng minh rằng: $\sqrt{3}\le t\le 3$.

Lời giải.

Ta có: $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ (Đ)

$$\Rightarrow xy+yx+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{t^2-3}{2}\quad (\text{vì}\quad x^2+y^2+z^2=3)$$ (Đ)

Do $0\le xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=3$ (Đ) $\Rightarrow 0\le\dfrac{t^2-3}{2}\le 3$ (Đ)

$\Rightarrow 3\le t^2\le 9$ (Đ)

$\Rightarrow \sqrt{3}\le t\le 3$ (đpcm)

Bài 3. Cho các số thực $a,b,c\in\left[1,3\right]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$, đặt $t=ab+bc+ca$

Chứng minh rằng: $11\le t\le 12$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Lời giải.

i) Do $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow 3t\le 36\Rightarrow t\le 12 \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a=b=c=2$

ii) Vì $a,b,c\in\left[1,3\right]$ nên $(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0$

$$\Rightarrow 3(ab+bc+ca)\ge abc+9(a+b+c)-27=abc+27 \qquad (2)$$

Do $a,b,c\in\left[1,3\right]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$$\Rightarrow abc\ge ab+bc+ca-(a+b+c)+1=ab+ba+ca-5 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $3(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca+22$ $\Rightarrow 3t\ge t+22$ $\Rightarrow t\ge 11$ (4)

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $a=1,b=2,c=3$.

Do đó: $11\le t\le 12$. (đpcm)

Bài 4. Cho các số dương $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Đánh giá biểu thức bằng các **bất đẳng thức phụ**

Lời giải

+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\qquad (x,y,z>0)$$

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

Ta có:

$$P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}\ge\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{2}.\quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=b=c=1$

Bài 5. Cho các số dương $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{a+b}\le\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để **đánh giá mẫu**.

Lời giải

+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2\qquad (1)$$

$$xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2\qquad (2)$$

+ Đánh giá các mẫu số của các số hạng của P bằng Cauchy, ta có:

$$P=\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{a+b}\le\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{2\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{2\sqrt{ab}}\quad \text{(sử dụng Cauchy \textbf{đánh giá mẫu})}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab.c^2}+\sqrt{bc.a^2}+\sqrt{ca.b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ac}.\sqrt{bc}+\sqrt{ab}.\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.\sqrt{bc}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca\right) \qquad \text{[do (1)]}$$

$$\leq\frac{1}{6}\left(a+b+c\right)^2=\frac{3}{2}\ \text{(đpcm)} \qquad \text{[do (2)]}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức phụ và Cauchy để đánh giá.

Lời giải

+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \qquad \text{(i)}$$

$$\left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right) \qquad \text{(ii)}$$

+ Từ đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=9-2(ab+bc+ca)$

+ Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 9 \qquad (2)$

+ **Đánh giá** vế trái của (2) ta được

$$2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \qquad \text{[do (i)]}$$

$$=\left(ab+bc+ca\right)+\left(ab+bc+ca\right)+\frac{3}{abc}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\left(ab+bc+ca\right)^2\cdot\frac{3}{abc}} \qquad \text{(áp dụng Cauchy)}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{3\left(ab^2c+a^2bc+abc^2\right)\cdot\frac{3}{abc}} \qquad \text{[do (ii)]}$$

$$=3\sqrt[3]{3abc\left(a+b+c\right)\cdot\frac{3}{abc}}=3\sqrt[3]{3.3.3}=9.\ \text{(đpcm)}$$

+ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$

Bài 7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}+\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}+\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Đánh giá bằng bất đẳng thức **Cauchy** ba số (*do trong biểu thức trên có bậc ba*), với chú ý điểm rơi và điều kiện $abc=1$ ở trên.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}$

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$1+a^3+b^3\ge 3\sqrt[3]{1.a^3.b^3}=3ab \Rightarrow \sqrt{1+a^3+b^3}\ge\sqrt{3ab}\Rightarrow \frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}} \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{bc}} \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ca}} \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}+\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}+\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

$$\ge 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}} \quad \text{(theo bđt } \textbf{Cauchy}\text{)} \qquad (4)$$

$$=3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{(abc)^2}}}=3\sqrt{3} \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^x+\left(\dfrac{20}{3}\right)^x\ge 3^x+4^x+5^x$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=0$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** ***xoay vòng cho 2*** số thích hợp.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x \ge 2.\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x}=2.\sqrt{\left(3^x\right)^2}=2.3^x$ (1)

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.4^x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.5^x \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\right]\ge 2\left(3^x+4^x+5^x\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x+4^x+5^x \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $(1),(2),(3)$ là các đẳng thức $\Leftrightarrow$ $x=0$

Bài 9. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** dạng cộng mẫu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ $\left(x,y>0\right)$ để đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ $\left(x,y>0\right)$ (*khi sử dụng cần chứng minh*)

Ta có: $\frac{1}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+b+c}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right) \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{1}{a+2b+c}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}\right)\quad(2)$$

$$\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)\quad(3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}.4=1\quad\text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{4}$.

Bài 10. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\ge 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy *xoay vòng cho 3 số*** thích hợp, chú ý đến điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+1\ge\frac{3a^2b^2}{bc}=\frac{3a^2b}{c}\quad(1)$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}+1\ge\frac{3b^2c}{a}\quad(2)$$

$$\frac{c^6}{a^3}+\frac{a^6}{b^3}+1\ge\frac{3c^2a}{b}\quad(3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$2\left(\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\right)+3\ge 3\left(\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\ge 3\quad\text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 11. Cho các số dương $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^3+3}} \geq \frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy **ghép cặp** thích hợp.

Lời giải

+ Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** cho 3 số , **ghép một số hạng** của P với hai số hạng thích hợp ta có:

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4} \quad (1)$$

$$\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{64}}=\frac{3b^2}{4} \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4} \quad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$P+\frac{a^2+b^2+c^2+9}{16} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{11}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{9}{16}=\frac{33}{16}-\frac{9}{16}=\frac{3}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Bài 12. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+c+a=4abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** ***xoay vòng cho 3 số*** thích hợp, chú ý đến điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1 \geq \frac{3}{ab}$ (1) (*bậc ba nên chọn 3 số*)

$$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+1 \geq \frac{3}{bc} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^3}+1+1\geq\frac{3}{c}\qquad(3)$$

$$\frac{1}{a^3}+1+1\geq\frac{3}{a}\qquad(4)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta có:

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+6\geq3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=3\frac{ab+bc+c+a}{abc}=12\ \Rightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq3\quad\text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=b=c=1$.

Bài 13. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\leq1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{82}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Có dạng của bất đẳng thức Minkowski, áp dụng các bất đẳng thứ phụ, chú ý điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:**

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}+\sqrt{c_1^2+c_2^2}\geq\sqrt{\left(a_1+b_1+c_1\right)^2+\left(a_2+b_2+c_2\right)^2}\quad(\textit{khi sử dụng cần chứng minh})$$

Ta có:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{\left(a+b+c\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

+ **Biến đổi và đánh giá từng bộ phận**

$$\left(a+b+c\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=81\left(a+b+c\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-80\left(a+b+c\right)^2$$

$$\geq18\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-80\left(a+b+c\right)^2\quad(\text{theo } \textbf{Cauchy})$$

$$\geq18.9-80=82\quad\text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 14. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2+\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2\leq12.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Định hướng:

Đánh giá đại diện biểu thức $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

+ Đánh giá đại diện biểu thức $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(x+2\sqrt{yz}+z\right)^2=\left(x.1+\sqrt{2x}.\sqrt{2y}+1.z\right)^2\le\left(x^2+2x+1\right)\left(1+2y+z^2\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2\le 1+2y+z^2 \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2\le 1+2z+x^2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2\le 1+2x+y^2 \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2+\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2\le 3+2(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$$

$$\le 6+2\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}=12 \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 15. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $4\left(x+y+z\right)=3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}\le\frac{3}{8}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Định hướng: Đánh giá đại diện biểu thức $\dfrac{1}{2+x+yz}$ bằng các bất đẳng thức **Cauchy**, thay đổi hình thức của điều kiện $4\left(x+y+z\right) = 3xyz \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{3}{4}$

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{1}{2+x+yz}$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$3xyz = 4(x+y+z) \ge 4.3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \ge 8$$

Tiếp tục đánh giá $2+x+yz$ ta có:

$$2+x+yz \ge 2\sqrt{2x}+yz \ge 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz} = 2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}} \ge 4\sqrt{2}\sqrt[4]{yz}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x+yz} \le \frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt[4]{yz}} \le \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right) \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x+yz} \le \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right) \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{1}{2+y+zx} \le \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{zx}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2+z+xy} \le \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right) \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy} \le \frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Bài 16. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Chứng minh rằng $xy+\dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{17}{4}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Định hướng: Đánh giá bằng bất **đẳng thức Cauchy** với chú ý điểm rơi ở trên và điều kiện $x+y=1$.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

\+ Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$xy+\frac{1}{xy}=xy+\frac{1}{16xy}+\frac{15}{16xy}\geq 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}}+\frac{15}{16\frac{(x+y)^2}{4}}=\frac{17}{4}\quad \text{(đpcm)}$$

\+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $5x+4y=23xy$. Chứng minh rằng

$$P=4x+9y+\frac{3}{x}+\frac{7}{2y}\geq\frac{43}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Biến đổi và đánh giá từng bộ phận bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Ta có: $5x+4y=23xy\Leftrightarrow\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23$

Khi đó: $P=4x+9y+\frac{3}{x}+\frac{7}{2y}=4x+\frac{1}{x}+9y+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\right)$

$$=4x+\frac{1}{x}+9y+\frac{1}{y}+\frac{23}{2}$$

Áp dụng bđt Cô-si ta suy ra được

$$P\geq 2\sqrt{4x.\frac{1}{x}}+2\sqrt{9y.\frac{1}{y}}+\frac{23}{2}=4+6+\frac{23}{2}=\frac{43}{2}\quad \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{1}{x}\\9y=\frac{1}{y}\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$

Bài 18. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$. Chứng minh rằng

$$x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}\geq 29.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=1; y=2; z=3$.

Định hướng: Biến đổi và đánh giá từng bộ phận bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

+ Từ giả thiết ta có $3(x+y+z)=(x+y)^2+z^2 \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2 \Rightarrow 0<x+y+z\leq 6$

+ **Biến đổi và đánh giá từng bộ phận**

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}=\left((x+z)+\frac{8}{\sqrt{x+z}}+\frac{8}{\sqrt{x+z}}\right)+\left((y+2)+\frac{8}{\sqrt{y+2}}+\frac{8}{\sqrt{y+2}}\right)+$$

$$+7\left(\frac{1}{\sqrt{x+z}}+\frac{1}{\sqrt{y+2}}\right)-2$$

$$\geq 12+12+\frac{14}{\sqrt[4]{(x+z)(y+2)}}-2\geq 22+\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+2}}\geq 29$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=1; y=2; z=3$.

Bài 19. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1+x}{1-y}+\frac{1+y}{1-z}+\frac{1+z}{1-x}\geq 6.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Đánh giá bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Vì $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$ nên $0<x,y,z<1$. Do đó: $\frac{1+x}{1-y},\frac{1+y}{1-z},\frac{1+z}{1-x}>0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số trên ta được

$$P\geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}} \qquad (1)$$

Ta có: $1+x=1+(1-y-z)=(1-y)+(1-z)$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực dương $(1-y)$ và $(1-z)$, ta được:

$$1+x\geq 2\sqrt{(1-y)(1-z)}$$

Tương tự: $1+y\geq 2\sqrt{(1-z)(1-x)}$

$1+z\geq 2\sqrt{(1-x)(1-y)}$

Suy ra: $(1+x)(1+y)(1+z)\geq 8(1-x)(1-y)(1-z)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $P\geq 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 20. Cho các số thực $x,y,z\leq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2^x}{2^{x+y}+2^z+1}+\frac{2^y}{2^{y+z}+2^x+1}+\frac{2^z}{2^{z+x}+2^y+1}\leq 1. \quad (1)$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=0$.

Định hướng: Đặt ẩn phụ (đổi biến) và đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ Đổi biến (đặt ẩn phụ)

Đặt $a=2^x,b=2^y,c=2^z$. Khi đó $a,b,c\in(0,1]$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{a}{ab+c+1}+\frac{b}{bc+a+1}+\frac{c}{ca+b+1}\leq 1 \quad (2)$$

+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{a}{ab+c+1}$

Ta có: $ab+1=(1-a)(1-b)+a+b\geq a+b\Rightarrow \dfrac{a}{ab+c+1}\leq\dfrac{a}{a+b+c}$ (3)

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{b}{bc+a+1}\leq\frac{b}{a+b+c} \quad (4)$$

$$\frac{c}{ca+b+1}\leq\frac{c}{a+b+c} \quad (5)$$

+ **Cộng** (3), (4), (5) vế theo vế ta có:

$$\frac{a}{ab+c+1}+\frac{b}{bc+a+1}+\frac{c}{ca+b+1}\leq 1 \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$ hay $x=y=z=0$.

Bài 21. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{x^3(y^3+z^3)+1}+\frac{1}{y^3(z^3+x^3)+1}+\frac{1}{z^3(x^3+y^3)+1}\leq 1.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Định hướng: Đổi biến (đặt ẩn phụ) và đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Vì $xyz=1$ nên $x=\frac{1}{yz},y=\frac{1}{zx},z=\frac{1}{xy}$. Do đó:

$$P=\frac{1}{\frac{1}{(yz)^3}(y^3+z^3)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(zx)^3}(z^3+x^3)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(xy)^3}(x^3+y^3)+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{y^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^3}+1}$$

Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{1}{y}$; $c=\frac{1}{z}$ ta có $a,b,c>0$ và $abc=1$ thì $P=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$

Vì $a,b>0$ nên $(a-b)(a^2-b^2)\geq 0$. Suy ra $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$

Do đó: $a^3+b^3+1\geq a^2b+ab^2+1=a^2b+ab^2+abc=ab(a+b+c)$

Tương tự: $b^3+c^2+1\geq bc(a+b+c)$

$c^3+a^3+1\geq ca(a+b+c)$

Suy ra: $P\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}=1$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=x=1$.

Bài 22. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}+6\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\geq 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=3$.

Định hướng: Đổi biến (đặt ẩn phụ) , biến đổi và đánh giá từng bộ phận.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Ta có: $xy+yz+zx=xyz\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Đặt $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ ta có $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Do đó $0<a,b,c<1$

Khi đó: $P=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+6(ab+bc+ca)$

$$=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+2(a+b+c)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$$

$$=\left(\frac{b^2}{a}-2b+a\right)+\left(\frac{c^2}{b}-2c+b\right)+\left(\frac{a^2}{c}-2a+c\right)-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2+3$$

$$=\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(c-a)^2}{c}-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2+3$$

$$=\frac{(1-a)(a-b)^2}{a}+\frac{(1-b)(b-c)^2}{b}+\frac{(1-c)(c-a)^2}{c}+3\geq 3 \quad \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Bài 23. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

\+ Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng $1\Rightarrow a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

\+ Biến đổi: $T=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}$

\+ Ta có $\frac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\leq 0$, $\forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Từ đó suy ra : $\frac{5a-1}{a-a^2}\leq 18a-3, \forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

\+ Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{5b-1}{b-b^2}\leq 18b-3, \forall b\in\left(0;\frac{1}{2}\right) \text{ và } \frac{5c-1}{c-c^2}\leq 18c-3, \forall c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

\+ Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có :

$$T=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\leq 18(a+b+c)-9=9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow T_{max}=9$ đạt được $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

\+ Vậy Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1, thì giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$ bằng 9 và đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Chú ý: Để có được bất đẳng thức $\frac{5a-1}{a-a^2}\le 18a-3, \forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ta đã sử dụng **phương pháp tiếp tuyến**

Bài 24. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

+ Nhận xét : $8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}$,(1) với mọi $0<a<\sqrt{3}$ dấu bằng khi $a=1$. Thật vậy

$$8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}\Leftrightarrow 3a^3-16a^2+23a-10\le 0\Leftrightarrow (a-1)^2(3a-10)\le 0$$ luôn đúng với mọi $0<a<\sqrt{3}$

dấu bằng khi $a=1$

+ Tương tự $8b+\frac{5}{b}\ge\frac{3b^2+23}{2}$,(2) dấu bằng khi $b=1$

$8c+\frac{5}{c}\ge\frac{3c^2+23}{2}$,(3) dấu bằng khi $c=1$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)+69}{2}=39$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S=39$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Chú ý: Để tìm ra bất đẳng thức $8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}$ ta sử dụng **phương pháp tiếp tuyến**.

Bài 25. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $9(a^4+b^4+c^4)-25(a^2+b^2+c^2)+48=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

+ Ta có $14x+2\ge 25x^2-9x^4 \ (*),\ \forall x>0,\ "="\Leftrightarrow x=1$ thật vậy

$(*)\Leftrightarrow 9x^4-25x^2+14x+2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2+18x+2)\ge 0$ luôn đúng .Vậy

+ $\begin{cases}14a+2\ge 25a^2-9a^4\\14b+2\ge 25b^2-9b^4\\14c+2\ge 25c^2-9c^4\end{cases}\Rightarrow 14(a+b+c)+6\ge 25(a^2+b^2+c^2)-9(a^4+b^4+c^4)=48$

$\Rightarrow a+b+c\ge 3$, dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=1$

+ Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schawrz** ta được

$$P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}\ge \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{3}\ge 1$$

+ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $1\Leftrightarrow a=b=c=1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho ba số thực x,y,z thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2\le 5$.

Lời giải.

Do $x,y,z\in\left[0,2\right]$ $\Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2)\le 0$ (1)

$\Rightarrow \left[xy-2(x+y)+4\right](z-2)\le 0$

$\Rightarrow xyz-(2xy+2yz+2zx)+4(x+y+z)-8\le 0$ (2)

Mặt khác, vì $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$\Rightarrow 2xy+2yz+2zx=\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Nên (2) $\Rightarrow xyz-\left[\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]+4\left(x+y+z\right)-8\le 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 5-xyz\le 5$ (do $x,y,z\ge 0$) (đpcm) (3)

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số x,y,z có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2

Nói cách khác:

Đẳng thức xảy ra khi $x=2,y=1,z=0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho ba số thực x,y,z thuộc đoạn $\left[0;1\right]$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2\le 1+x^2y+y^2z+z^2x$.

Lời giải.

Do $x,y,z\in\left[0,1\right]$ $\Rightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)\ge 0$ (1)

$\Rightarrow 1-x^2-y^2-z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2\ge 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2$ (2)

Mặt khác, vì $x,y,z\in\left[0,1\right]$ nên $x^2y^2\le x^2y,\ \ y^2z^2\le y^2z,\ \ z^2x^2\le z^2x$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra:

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2\le 1+x^2y+y^2z+z^2x$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $x=1,y=z=0$ và các hoán vị.

Bài 3. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, đặt $t=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng: $-\dfrac{1}{2}\le t\le 1$.

Lời giải.

i) Do $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=1$ $\Rightarrow t\le 1$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii) Vì $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1+2(xy+yz+zx)\geq 0$

$$\Rightarrow 1+2t\geq 0 \ \Rightarrow t\geq -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra, chẳng hạn khi $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, z=0$

Do đó: $-\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. (đpcm)

Bài 4. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12$, đặt $t=x^2+y^2+z^2$. Chứng minh rằng: $3\leq t\leq 4$.

Lời giải.

i) Do $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12 \Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)=12-(xy+yz+zx)\leq 12$

$$\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\leq 12$$

$$\Rightarrow 3t\leq 12 \Rightarrow t\leq 4 \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x=2, y=z=0$

ii) Vì $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12 \Rightarrow xy+yz+zx=12-3(x^2+y^2+z^2)$ (2)

Ta lại có: $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $12-3(x^2+y^2+z^2)\leq x^2+y^2+z^2$

$$\Rightarrow 12-3t\leq t \Rightarrow t\geq 3 \qquad (4)$$

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $x=y=z=1$.

Do đó: $3\leq t\leq 4$. (đpcm)

Bài 5. Cho các số thực $x,y,z\in\left[0;2\right]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$, đặt $t=xy+yz+zx$. Chứng minh rằng: $2\leq t\leq 3$.

Lời giải.

i) Do $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2=3 \ \Rightarrow t\leq 3$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$.

ii) Vì $x,y,z\in\left[0;2\right]\Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2)\leq 0$

$$\Rightarrow xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8\leq 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\geq \frac{xyz+4(x+y+z)-8}{2}\geq \frac{12-8}{2}=2 \ \Rightarrow t\geq 2 \qquad (2)$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra, chẳng hạn khi $x=2, y=1, z=0$

Do đó: $2\leq t\leq 3$. (đpcm)

Bài 6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$, đặt $t=x^2+y^2+z^2$.
Chứng minh rằng: $3 \le t < 9$.

Lời giải.

i) Do $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow 3t \ge 9 \Rightarrow t \ge 3$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$.

ii) Vì $x, y, z > 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 < (x+y+z)^2 \Rightarrow t < 9$

Do đó: $3 \le t < 9$. (đpcm)

Bài 7. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, đặt $t=xy+yz+2zx$.
Chứng minh rằng: $t \ge -1$.

Lời giải.

Do $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 1+2(xy+yz+zx) \ge 0$

$$\Rightarrow xy+yz+zx \ge -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow xy+yz+2zx \ge -\frac{1}{2}+xz \ge -\frac{1}{2}-\frac{x^2+z^2}{2} = -1+\frac{y^2}{2} \ge -1 \quad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=0$

Do đó: $t \ge -1$. (đpcm)

Bài 8. Cho các số thực a, b, c thoả $\begin{cases} 1 \le a, b, c \le 3 \\ a+b+2c=6 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $a^3+b^3+5c^3 \le 42$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $1 \le a \le 3 \Rightarrow (a-1)(a-3) \le 0 \Rightarrow a^2 \le 4a-3 \Rightarrow a^3 \le 13a-12$

Tương tự: $1 \le b \le 3 \Rightarrow (b-1)(b-3) \le 0 \Rightarrow b^2 \le 4b-3 \Rightarrow b^3 \le 13b-12$

$1 \le c \le 2 \Rightarrow (c-1)(c-2) \le 0 \Rightarrow c^2 \le 3a-2 \Rightarrow c^3 \le 7c-6$

Từ đó $a^3+b^3+5c^3 \le 13a-12+13b-12+5(7c-6) \le 13(a+b+2c)+9c-54$
$\le 13.6+9.2-54=42$ (đpcm) . Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=2$.

CÁC BÀI TOÁN "THỬ SỨC VỚI BẤT ĐẲNG THỨC"

(Thời gian làm 1 bài là 60 phút)

Bài 1. (1 điểm)

Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $8^x+8^y+8^z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4^x}{3-4^x}+\frac{4^y}{3-4^y}+\frac{4^z}{3-4^z}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài 2. (1 điểm)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1}\le 1.$$

Bài 3. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}.$$

Bài 4. (1 điểm)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2.$$

Bài 5. (1 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Bài 6. (1 điểm)

Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[0;1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+2}{b^2+1}+\frac{b^3+2}{c^2+1}+\frac{c^3+2}{a^2+1}$$

Bài 7. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}.$$

Bài 8. (1 điểm)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}.$$

Bài 9. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}$$

Bài 10. (1 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x^2 + yz} + \frac{y^3}{y^2 + zx} + \frac{z^3}{z^2 + xy}$$

Bài 11. (1 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 3(x + y + z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z + \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.
Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $8^x + 8^y + 8^z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4^x}{3-4^x} + \frac{4^y}{3-4^y} + \frac{4^z}{3-4^z} \geq \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Định hướng:

+ Đặt ẩn phụ $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$, chuyển về bài toán sau:

Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$. CMR: $\dfrac{a^2}{3-a^2} + \dfrac{b^2}{3-b^2} + \dfrac{c^2}{3-c^2} \geq \dfrac{3}{2}$

+ Đánh giá đại diện biểu thức, lưu ý đến giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

Đáp án

1. Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \Rightarrow a,b,c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{a^2}{3-a^2} + \dfrac{b^2}{3-b^2} + \dfrac{c^2}{3-c^2} \geq \dfrac{3}{2}$	0,25
$\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{a(3-a^2)} + \dfrac{b^3}{b(3-b^2)} + \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \geq \dfrac{3}{2}$	0,25
Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $2\left[a(3-a^2)\right]^2 = 2a^2.(3-a^2)(3-a^2) \leq \left(\dfrac{2a^2+3-a^2+3-a^2}{3}\right)^3 = 8$ $\Rightarrow a(3-a^2) \leq 2 \Rightarrow \dfrac{a^3}{a(3-a^2)} \geq \dfrac{a^3}{2}$.	0,25
Tương tự ta có $\dfrac{b^3}{b(3-b^2)} \geq \dfrac{b^3}{2}; \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \geq \dfrac{c^3}{2}$ Do đó $\dfrac{a^3}{a(3-a^2)} + \dfrac{b^3}{b(3-b^2)} + \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \geq \dfrac{1}{2}(a^3+b^3+c^3) = \dfrac{3}{2}$ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 0$. ***Chú ý:*** Học sinh có thể khảo sát hàm số $f(t) = t(3-t^2)$ trên $(0; \sqrt[3]{3})$ để chỉ ra $t(3-t^2) \leq 2$.	0,25

Bài 2
Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1}\le 1.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$.

Định hướng:

+ Đặt ẩn phụ $x=2^{\frac{a}{2}}, y=2^{\frac{b}{2}}, z=2^{\frac{c}{2}}$ chuyển về bài toán sau:

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$. CMR: $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1$

+ Đánh giá đại diện biểu thức.

Đáp án

Đặt $x=2^{\frac{a}{2}},\ y=2^{\frac{b}{2}},\ z=2^{\frac{c}{2}},\ x,y,z>0.$ Khi đó, ta có $xyz=2^{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}=1$. BĐT trở thành $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1.$	0,25
Ta có $x^3+y^3+1 = x^3+y^3+xyz$ $= (x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz$ $\ge (x+y)xy+xyz$ $= xy(x+y+z)>0.$	0,25
Suy ra $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}\le\dfrac{1}{xy(x+y+z)}=\dfrac{z}{x+y+z}.$ Tương tự, ta có $\dfrac{1}{y^3+z^3+1}\le\dfrac{x}{x+y+z}$ $\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le\dfrac{y}{x+y+z}.$	0,25
Cộng 3 BĐT trên vế theo vế ta được $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1.$ Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=0.$	0,25

Bài 3

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{10}$.

Định hướng:

+ Đánh giá đại diện biểu thức, lưu ý giả thiết $13x+5y+12z=9$

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $$\frac{xy}{2x+y}=\frac{xy}{x+x+y}\le\frac{xy}{3\sqrt[3]{xxy}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{xyy}\le\frac{1}{3}\frac{x+y+y}{3}=\frac{1}{9}(x+2y).$$ Tương tự ta có $\frac{yz}{2y+z}\le\frac{1}{9}(y+2z)$; $\frac{zx}{2z+x}\le\frac{1}{9}(z+2x)$.	0,5
Suy ra $A\le\frac{1}{9}(x+2y)+\frac{3}{9}(y+2z)+\frac{6}{9}(z+2x)=\frac{1}{9}(13x+5y+12z)=1$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{10}$. Suy ra giá trị lớn nhất của A là 1, đạt khi $x=y=z=\frac{3}{10}$.	0,5

Bài 4
Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$A=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2.$$

Hướng dẫn giải
Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.
Định hướng:
+ Đánh giá đại diện biểu thức x^2y^3+x+1,..
+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right)$.

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $$x^2y^3+x+1\geq 3xy,\ \ y^2z^3+y+1\geq 3yz,\ \ z^2x^3+z+1\geq 3zx.$$ Khi đó $$A=(x^2y^3+x+1)+(y^2z^3+y+1)+(z^2x^3+z+1)+x^2+y^2+z^2-3(x+y+z)$$ $$\geq 3(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2-3(x+y+z)$$ $$=(x+y+z)^2-3(x+y+z)+3$$ $$=(x+y+z)(x+y+z-3)+3.$$	0,5
Từ giả thiết $xy+yz+zx=3$ và $x,\ y,\ z\geq 0$ ta có $$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=9.$$ Suy ra $x+y+z\geq 3$. Do đó $A\geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3, đạt được khi $x=y=z=1$.	0,5

Bài 5 Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.

Định hướng:

+ Đặt ẩn phụ $x=a+b+c, y=b+c+4a, z=c+a+16b$ chuyển về bài toán sau:

Cho $x,y,z>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{15}\left(\frac{z}{x}+16\frac{x}{z}\right)-\frac{4}{5}$

+ Đánh giá bằng bất đẳng thức **Cauchy**.

Đáp án

Đặt $x=a+b+c,\ y=b+c+4a,\ z=c+a+16b$. Khi đó $x,\ y,\ z>0$ và $$a=\frac{y-x}{3},\ b=\frac{z-x}{15},\ c=\frac{21x-5y-z}{15}.$$ Suy ra $P=\dfrac{\frac{y-x}{3}+\frac{z-x}{15}}{x}+\dfrac{\frac{z-x}{15}+\frac{21x-5y-z}{15}}{y}+\dfrac{\frac{21x-5y-z}{15}+\frac{y-x}{3}}{z}$ $$=\frac{-6x+5y+z}{15x}+\frac{20x-5y}{15y}+\frac{16x-z}{15z}=-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}.\frac{y}{x}+\frac{1}{15}.\frac{z}{x}+\frac{4}{3}.\frac{x}{y}+\frac{16}{15}.\frac{x}{z}$$	0,5
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{15}\left(\frac{z}{x}+16\frac{x}{z}\right)-\frac{4}{5}\geq\frac{4}{3}+\frac{8}{15}-\frac{4}{5}=\frac{16}{15}.$$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}y^2=4x^2\\z^2=16x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\z=4x\end{cases}$ $$\Leftrightarrow\begin{cases}b+c+4a=2(a+b+c)\\c+a+16b=4(a+b+c)\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{7}c,\ b=\frac{3}{7}c.$$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{15}$, đạt được khi $a=\frac{5}{7}c,\ b=\frac{3}{7}c.$	0,5

Bài 6
Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[0;1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+2}{b^2+1}+\frac{b^3+2}{c^2+1}+\frac{c^3+2}{a^2+1}.$$

Hướng dẫn giải
Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.
Định hướng:
+ Đánh giá đại diện, theo hướng khử mẫu.

Đáp án

Vì $a,\ b\in[0;\ 1]$ nên ta có $\frac{a^3+2}{b^2+1}\le\frac{a^2+2}{b^2+1}=(a^2+2)\left(1-\frac{b^2}{b^2+1}\right)=(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{b^2+1}\le$ $\le(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{2}=a^2-b^2+2-\frac{1}{2}a^2b^2.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,\ b\in\{0,\ 1\}$.	**0,5**
Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\frac{b^3+2}{c^2+1}\le b^2-c^2+2-\frac{1}{2}b^2c^2;\ \frac{c^3+2}{a^2+1}\le c^2-a^2+2-\frac{1}{2}c^2a^2.$ Suy ra $P\le6-\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le6.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,\ b,\ c\in\{0,\ 1\}$ và $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$ hay trong ba số *a*, *b*, *c* có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0. Suy ra giá trị lớn nhất của *P* là 6, đạt được khi trong ba số *a*, *b*, *c* có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.	**0,5**

Bài 7

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Định hướng:

+ Đánh giá đại diện.

+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Đáp án

Ta có $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+1\ge\frac{3}{xy};\ \frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+1\ge\frac{3}{yz};\ \frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+1\ge\frac{3}{zx}$. Suy ra $\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+3\ge\frac{3}{xy}+\frac{3}{yz}+\frac{3}{zx}$. Suy ra $P+3\ge\frac{3}{xy}+\frac{3}{yz}+\frac{3}{zx}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}$.	**0,5**
Mặt khác, áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, với $a, b>0$ ta có $P+3\ge\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}+\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}\right)+\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}\right)+\left(\frac{1}{zx}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}\right)$ $\ge\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}+\frac{4}{x^2+y^2}+\frac{4}{y^2+z^2}+\frac{4}{z^2+x^2}$ $=4\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+4\left(\frac{1}{2yz}+\frac{1}{y^2+z^2}\right)+4\left(\frac{1}{2zx}+\frac{1}{z^2+x^2}\right)$ $\ge\frac{16}{(x+y)^2}+\frac{16}{(y+z)^2}+\frac{16}{(z+x)^2}\ge 16.\frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}}$ $\ge 16.\frac{3.9}{(2x+2y+2z)^2}\ge 16.\frac{3.9}{4.3^2}=12.$ Do đó $P\ge 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 9, đạt được khi $x=y=z=1$.	**0,5**

Bài 8
Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 \le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.

Định hướng: .

+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{8}{\left(a+b\right)^2}$.

Đáp án

Ta có $2x+4y+2z \le (x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1) = x^2+y^2+z^2+6 \le 3y+6$. Suy ra $2x+y+2z \le 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{y}{2}=z=1$. Chú ý rằng, với hai số dương a, b áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{8}{(a+b)^2}, \qquad (*)$$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.	0,5
Áp dụng (*) ta được $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(\frac{y}{2}+1)^2}+\frac{8}{(z+3)^2} \ge \frac{8}{(x+1+\frac{y}{2}+1)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$ $$\ge \frac{64}{(x+\frac{y}{2}+2+z+3)^2}=\frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2} \ge \frac{64.4}{(6+10)^2}=1.$$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1, y=2, z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt khi $x=1, y=2, z=1$.	0,5

Bài 9
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=2$.

Định hướng: .

+ Đánh giá đại diện.

Đáp án

Áp dụng BĐT Côsi ta có $3xyz=4(x+y+z)\ge 4.3\sqrt[3]{xyz}$, nên $xyz\ge 8$. Tiếp tục áp dụng BĐT Côsi ta được $2+x+yz\ge 2\sqrt{2x}+yz\ge 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz}=2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz}=2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}}\ge 4\sqrt{2}.\sqrt[4]{yz}.$ Suy ra $\frac{1}{2+x+yz}\le\frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt[4]{yz}}\le\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right).$	**0,5**
Tương tự ta cũng có $\frac{1}{2+y+zx}\le\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{zx}\right), \frac{1}{2+z+xy}\le\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right).$ Do đó $P\le\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2.$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{8}$, đạt được khi $x=y=z=2.$	**0,5**

Bài 10

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x^2+yz}+\frac{y^3}{y^2+zx}+\frac{z^3}{z^2+xy}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Định hướng: .

+ Đánh giá đại diện $\frac{x^3}{x^2+yz}-x$.

Đáp án

Với x, y, z > 0 ta có: $\frac{x^3}{x^2+yz}-x=-\frac{xyz}{x^2+yz}=-\frac{1}{\frac{x}{yz}+\frac{1}{x}}\ge-\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{1}{x}}}=-\frac{\sqrt{yz}}{2}$ $\ge-\frac{y+z}{4}$.	*0, 25*
Tương tự $\frac{y^3}{y^2+zx}-y\ge-\frac{x+z}{4}$, $\frac{z^3}{z^2+xy}-z\ge-\frac{x+y}{4}$.	*0,25*
Suy ra $P\ge\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}$.	*0, 25*
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.	*0, 25*

Bài 11
Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z+\frac{20}{\sqrt{x+z}}+\frac{20}{\sqrt{y+2}}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=1,y=2,z=3$.

Định hướng: .

+ Biến đổi biểu thức và đánh giá bằng **Cauchy** cho 3 biểu thức.
+ Lưu ý đến điểm rơi và giả thiết.

Đáp án

Từ giả thiết ta có $3(x+y+z)=(x+y)^2+z^2\ge\frac{1}{2}(x+y+z)^2$. Suy ra $x+y+z\le 6$.	0,5
Khi đó, áp dụng BĐT Côsi ta có $P=\left((x+z)+\frac{8}{\sqrt{x+z}}+\frac{8}{\sqrt{x+z}}\right)+\left((y+2)+\frac{8}{\sqrt{y+2}}+\frac{8}{\sqrt{y+2}}\right)+4\left(\frac{1}{\sqrt{x+z}}+\frac{1}{\sqrt{y+2}}\right)-2$ $\ge 12+12+\frac{8}{\sqrt[4]{(x+z)(y+2)}}-2\ge 22+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+2}}\ge 26.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,\ y=2,\ z=3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 26, đạt được khi $x=1,\ y=2,\ z=3$.	0,5

---------------------------**Hết**---------------------